

🌀 Baccalauréat C Paris juin 1978 🌀

EXERCICE 1

4 POINTS

Dans l'anneau $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ (dont les éléments sont notés $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dots, \dot{90}$),

1. discuter, suivant les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$, l'équation

$$ax = \dot{0},$$

2. résoudre l'équation

$$x^2 + \dot{2}x - \dot{3} = \dot{0}.$$

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé \mathcal{R} d'axes Ox, Oy .

1. Discuter, suivant la valeur du paramètre réel λ , la nature de la courbe C_λ dont l'équation dans le repère \mathcal{R} est

$$\lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 + \lambda^2 - \lambda = 0$$

2. Soit M_0 un point quelconque du plan. Discuter, suivant la position de M_0 le nombre et la nature des courbes C_λ passant par ce point ; dessiner les régions trouvées.

PROBLÈME

12 POINTS

Soit m un paramètre pouvant prendre toute valeur réelle. Pour chaque valeur de m , on considère la fonction f_m de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$f_m(x) = \frac{2(x - m)}{|x - m| + m}.$$

Partie A

1. Déterminer dans chacun des cas $m > 0$, $m = 0$, $m < 0$
 - a. l'ensemble \mathcal{D}_m des points où f_m est définie,
 - b. l'ensemble \mathcal{C}_m des points où f_m est continue,
 - c. l'ensemble \mathcal{F}_m des points où f_m est dérivable.
2. Soit C_m la courbe représentative de f_m dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.
Quelles sont les asymptotes de C_m ?
La courbe C_m admet-elle un centre de symétrie ?
Dessiner C_{-1}, C_0, C_1 .
 - a. Montrer qu'il existe un unique point commun à toutes les courbes C_m correspondant aux m strictement positifs.
 - b. Montrer que, pour chaque m strictement positif, il existe une application affine transformant C_1 en C_m et C_{-1} en C_{-m} .

Partie B

Dans toute cette partie, m est strictement positif.

1. a. Calculer l'intégrale

$$\int_0^a [2 - f_m(x)] dx$$

où a est un réel vérifiant $0 < m \leq a$.

- b. En déduire que, a étant fixé, cette intégrale tend vers une limite lorsque m tend vers 0 par valeurs positives.
2. Soit un entier $p \geq 2$.

- a. Montrer que, pour chaque $m > 0$,

$$\int_0^m [2 - f_m(x)]^p dx \leq 3^p m.$$

sans chercher à calculer l'intégrale.

- b. Calculer

$$\int_m^a [2 - f_m(x)]^p dx.$$

lorsque $0 < m \leq a$.

- c. En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{\substack{m \rightarrow 0 \\ m > 0}} \int_0^a [2 - f_m(x)]^p dx.$$

3. a. Montrer que, pour chaque x réel, $f_m(x)$ tend vers une limite finie $\lambda(x)$ lorsque m tend vers 0 par valeurs positives ; comparer les fonctions λ et f_0 .
- b. Existe-t-il un réel $m > 0$ tel qu'on ait :

$$\text{pour tout } x > 0, \quad 2 - f_m(x) < \frac{1}{10}.$$

- c. Soit un réel $\epsilon > 0$. Existe-t-il un réel $\alpha > 0$ tel qu'on ait : pour tout m tel que $0 < m < \alpha$, pour tout $x \geq \epsilon$, $2 - f_m(x) < \epsilon$?
- d. En déduire une autre démonstration du résultat trouvé au B 2. c.