Baccalauréat C Poitiers septembre 1978

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Soient a et b deux entiers premiers entre eux.

1. Montrer que $a+b$ et ab sont premiers entre eux ; en déduire que les nombres $a+b$ et a^2-ab+b^2 sont premiers entre eux ou divisibles par 3.
2. Démontrer l'égalité :

$$\text{P.G.C.D.}\left(a+b\,;\ a^2-ab+b^2\right)=\text{P.G.C.D.}(a+b\,;\ 3).$$

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Dans un plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, on considère les points A et B définis par $\overrightarrow{\text{OA}}=a^2\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\text{OB}}=a\overrightarrow{\jmath}$, où a est un nombre réel donné.

1. Un point M de coordonnées x et y étant donné, discuter l'existence d'un point M' vérifiant

$$\overrightarrow{M'\text{A}}+\overrightarrow{M'\text{B}}+a\overrightarrow{M'M}=0,$$

selon la valeur de a et la position de M.

2. Lorsqu'elle est définie, on appelle f l'application qui à un point M de $\mathcal{P}$ fait correspondre le point M' de $\mathcal{P}$ défini par la relation de la question précédente. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

PROBLÈME **14 POINTS**

Les parties A et B sont largement indépendantes.

Partie A

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, orienté, dont $\text{B}=\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ est une base orthonormée directe. Pour tout nombre réel m, on considère l'application linéaire φ_m de E dans E définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\varphi_m\left(\overrightarrow{\imath}\right)&=&\dfrac{1}{3}\left[m\overrightarrow{\imath}+(m+1)\overrightarrow{\jmath}+2\overrightarrow{k}\right]\\ \varphi_m(\overrightarrow{\jmath})&=&\dfrac{1}{3}\left[-2\overrightarrow{\imath}-m\overrightarrow{\jmath}+(m+1)\overrightarrow{k}\right]\\ \varphi_m(\overrightarrow{k})&=&\dfrac{1}{3}\left[(m+1)\overrightarrow{\imath}-2\overrightarrow{\jmath}+m\overrightarrow{k}\right].\end{array}\right.$$

1. **a.** Déterminer les coordonnées $\left(X'\ ;\ Y'\ ;\ Z'\right)$ de l'image par φ d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(X\ ;\ Y\ ;\ Z)$.

   b. Démontrer que les vecteurs $\varphi_m\left(\overrightarrow{\imath}\right), \varphi_m\left(\overrightarrow{\jmath}\right), \varphi_m\left(\overrightarrow{k}\right)$ sont linéairement indépendants pour tout m.
   L'application φ_m est-elle bijective pour tout m ?
2. Montrer qu'il existe exactement deux valeurs m_1 et m_2 $(m_2<m_1)$ de m telles que φ_{m_1} et φ_{m_2} soient des transformations orthogonales de E. Établir que φ_{m_1} est une rotation vectorielle dont on précisera l'axe.

3. On s'intéresse au cas où $m = 1$, et on pose $\varphi_m = \varphi_{m_1}$. Soit D l'ensemble des vecteurs invariants par φ, et P le plan vectoriel orthogonal à D. On considère les vecteurs :

$$\overrightarrow{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{k}\right), \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\jmath}, \quad \text{et } \overrightarrow{w} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{k}\right).$$

a. Vérifier que $\overrightarrow{w}$ appartient à D, et donner une équation cartésienne de P relativement à B.

b. En considérant l'endomorphisme ψ de E défini par

$$\psi\left(\overrightarrow{\imath}\right) = \overrightarrow{u}, \quad \psi\left(\overrightarrow{\jmath}\right) = \overrightarrow{v} \quad \text{et} \quad \psi\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{w},$$

montrer que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est une base orthonormée directe de E.

c. Dans toute la suite, on oriente D par $\overrightarrow{w}$ et, par convention, $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est une base orthonormée directe de P.

On désigne par φ' la restriction de φ à P. Si α est une mesure de l'angle de φ (ou de φ') dans P ainsi orienté, déterminer $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

Partie B

On désigne par $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien de direction P rapporté au repère orthonormé direct $R = \left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (le point O appartient à $\mathscr{P}$).
Soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans lui-même, qui, au point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point M' de coordonnées

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}y \\ y' & = & \dfrac{2\sqrt{3}}{3}x - \dfrac{1}{3}y \end{array}\right.$$

1. Déterminer la nature de f et en déduire l'existence et la définition analytique de son application réciproque.

2. a. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$g(x) = \frac{7\sqrt{2}}{8}\left(\frac{x^2+1}{x}\right).$$

Étudier les variations de g, et tracer sa courbe représentative C dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté à R.

b. Montrer que la courbe C' image de C par f a pour équation cartésienne

$$x^2 - 8y^2 - 7 = 0.$$

3. On considère un point mobile N de $\mathscr{P}$ dont les coordonnées à l'instant t (t décrivant $\mathbb{R}$) sont données par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x = x(t) & = & 4\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t} \\ y = y(t) & = & 2\mathrm{e}^{t} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}. \end{array}\right.$$

a. À quels instants t le point N est-il sur C' ?

b. Vérifier que le support Γ de la trajectoire T de N a pour équation cartésienne

$$x^2 - 4y^2 - 16 = 0.$$

Identifier Γ (nature, centre, sommets, axes de symétrie, asymptotes éventuelles).

Tracer Γ et préciser T (on démontrera que $x(t)$ et $y(t)$ décrivent respectivement $[4\ ;\ +\infty[$ et $\mathbb{R}$, lorsque t décrit $\mathbb{R}$).

c. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération de N à l'instant t, et en déduire l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles le mouvement est accéléré.