Baccalauréat C Polynésie juin 1978

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Soit l'espace linéaire p de P, espace vectoriel réel, dans lui-même de matrice A relativement à la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f\left(\vec{\imath}\right) & = & a\vec{\imath} + d\vec{\jmath}\\ f\left(\vec{\jmath}\right) & = & b\vec{\imath} + c\vec{\jmath}\end{array}\right.$$

où a, b, c, d sont quatre nombres entiers strictement positifs.
Sachant que a, b, c, d sont dans cet ordre des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q, q étant strictement supérieur à 1 et premier avec a, déterminer la matrice A pour que son déterminant soit égal à : $-9a^3$.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soit V un espace vectoriel euclidien de base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormée et E un espace affine associé à V muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère f l'application affine de E dans E définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1\\ y' & = & \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1\\ z' & = & \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 1\end{array}\right.$$

1. Montrer que l'endomorphisme φ de V associé à f conserve la norme.
2. Montrer que φ est involutif et caractériser φ.
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f et préciser si f est involutive.
4. Soit s l'application affine d'endomorphisme associé φ et telle que $s(\text{O}) = \text{O}$.
   a. Caractériser s.
   b. Préciser l'endomorphisme associé à $f \circ s$, en déduire la nature de $t = f \circ s$ et montrer que f est la composée de deux applications que l'on précisera.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

On considère la fonction φ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+x} - \text{Log}\,(1+x)$$

(où Log est le logarithme népérien).

1. Montrer que φ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+$,dont on donnera l'image $\varphi\left(\mathbb{R}_+\right)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$, pour tout $x \geqslant 0$.
2. Étudier la branche infinie (on utilisera l'égalité $1 + x = x\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ pour $x > 0$) et tracer la courbe représentative (C), dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité choisie : 2 cm).

Partie B

On considère maintenant que (P) est un plan affine euclidien et que le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est orthonormé. Soit le mouvement d'un point M de (P) dont les coordonnées sont données par

$$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& t-1\\ y &=& 1-\dfrac{1}{t}-\text{Log}\,t \quad \text{avec } t \geqslant 1.\end{array}\right.$$

t désignant le temps.

1. Trouver la trajectoire (C') du point M (on précisera le sens de parcours).
2. Déterminer $(H) = \{m \in (\text{P}) | \quad \overrightarrow{\text{O}m} = \overrightarrow{\text{V}(t)}\}$, $\overrightarrow{\text{V}(t)}$ désignant levecteur-vitesse de M à l'instant t .
3. Déterminer dans quels intervalles de temps le mouvement est accéléré, retardé.
   Tracer dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ les vecteurs-vitesse et accélération à la date $t = 1$.

Partie C

On considère maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \text{e}^{-x}\text{Log}\left(1+\text{e}^{x}\right).$$

Soit (C'') la courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$. Que peut-on dire alors de (C'') ?
2. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $\varphi\left(\text{e}^{x}\right)$. En déduire le sens de variation de la fonction f.
3. Exprimer $f(x)$ en fonction de $u = \text{e}^{x}$. En déduire la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$?
4. En utilisant l'égalité $1+\text{e}^{x} = \text{e}^{x}\left(\text{e}^{-x}+1\right)$, trouver la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Tracer (C") dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm).
   On donne $\text{Log}\ 3,72 \approx 1,31$ et $\text{Log}\ 8,39 \approx 2,12$.
6. Soit l'intégrale $F(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\text{d}x$.
   a. Montrer qu'il existe des réels b et c tels que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\text{e}^{x}}{1+\text{e}^{x}} = b + \frac{c}{1+\text{e}^{x}}.$$
   Au moyen d'une intégration par parties, ramener le calcul de $F(a)$ au calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a \frac{\text{e}^{x}}{1+\text{e}^{x}}\,\text{d}x$.
   En déduire $F(a)$.
   b. $a > 0$. Que représente $F(a)$? Étudier l'existence et donner s'il y a lieu, la valeur de $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} F(a)$.
   c. $a < 0$. Que représente $F(a) - a$? Étudier l'existence et donner s'il y a lieu, la valeur de $\displaystyle\lim_{a\to-\infty} (F(a) - a)$.

Partie D

On considère les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient la relation

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}.$$

1. Montrer que la fonction f définie au C vérifie (1) .
2. On considère les fonctions f vérifiant (1) de la forme $f(x) = \mathrm{e}^{-x}g(x)$. Trouver la relation (2) vérifiée par les fonctions g. Quelle est l'expression des fonctions g ?
3. En déduire l'ensemble des fonctions f vérifiant (1).