Baccalauréat C Reims juin 1978

EXERCICE 1 **3 POINTS**

On considère les trois entiers naturels $a,\ b,\ c$ qui s'écrivent dans la base n

$$a = 111, \quad b = 114, \quad c = 13054$$

1. Sachant que $c = ab$, déterminer n , puis l'écriture de chacun des nombres $a,\ b,\ c$ dans le système décimal.
2. Vérifier, en utilisant l'algorithme d'Euclide, que a et b sont premiers entre eux. En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $ax + by = 1$.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Soit a et b deux nombres réels ; on considère l'application affine $F_{a,\ b}$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M de $\mathcal{P}$ de coordonnées $x,\ y$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ associe le point $F_{a,\ b}(M)$ de coordonnées

$$X = ax + by \quad \text{et} \quad Y = bx + ay$$

dans ce même repère.

1. Déterminer les axes de symétrie et les asymptotes de l'hyperbole (h) du plan $\mathcal{P}$ dont l'équation est $x^2 - y^2 = 1$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. Donner suivant les valeurs de a et b l'image du plan $\mathcal{P}$ par $F_{a,\ b}$.
3. Dans le cas où $F_{a,\ b}$ est bijective, montrer que l'image de (h) par cette application est une conique (H) dont on donnera la nature.
4. On suppose maintenant que $F_{a,\ b}$ n'est pas bijective.
   Trouver l'image de la courbe (h) par $F_{a,\ b}$.

PROBLÈME **12 POINTS**

Problème 12 points
Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ et C le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ constitué par les fonctions continues.
À tout élément f de C on associe la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\tilde{f}(x) = \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour tout } x \text{ réel.}$$

On appelle φ l'application de C dans $\mathcal{F}$ définie par $\varphi(f) = \tilde{f}$

Partie A

1. Calculer f dans les cas suivants :
   a. $f(t) = 1$
   b. $f(t) = t^n,\ n$ entier $\geqslant 1$
   c. $f(t) = \sin t$
   d. $f(t) = \cos t$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ t & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ \dfrac{1}{t^2} & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$

a. Vérifier que g est un élément de C.

b. Calculer $\tilde{g}(x)$ sur chacun des intervalles suivants :

$$]-\infty\,;\,0],\quad]0\,;\,1[,\quad [1\,;\,+\infty[$$

c. Tracer avec précision dans des repères différents les courbes représentatives des fonctions g, $\tilde{g}$ et $g_\star$ où $g_\star$ est définie par

$$\begin{cases} g_\star(x) & = & \dfrac{2}{x^2} \quad \text{pour } x \neq 0 \\ g_\star(0) & = & 0 \end{cases}$$

3. Montrer que si f est un élément de C , alors $\tilde{f}$ est dérivable et sa dérivée est continue.

4. Montrer que φ est une application linéaire de C dans C. Montrer que φ est injective.
Montrer en donnant un exemple que φ n'est pas surjective.

5. Pour tout élément f de C, on note $M(x)$ le maximum de $|f(t)|$ quand t est compris entre 0 et x. Montrer que l'on a alors pour tout x réel

$$\left|\tilde{f}(x)\right|(x) \leqslant M(x)\frac{x^2}{2}.$$

Partie B

On pose, pour tout élément f de C

$$f_\star(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}\tilde{f}(x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

et on appelle ψ l'application de C dans $\mathscr{F}$ définie par $\psi(f) = f_\star$.

1. On désigne par f_0 la fonction définie par $f_0(x) = 1$ pour tout x réel.
Calculer $\psi\left(f_0\right)$.

2. Soit f un élément de C s'annulant au point 0 ; montrer, en utilisant le résultat A 5. que $f_\star$ est alors continue en 0.

3. Soit f un élément de C. On définit h sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = f(x) - f(0).$$

Montrer que l'on a $\quad \psi(f) = \psi(h) + f(0)f_0$.
En déduire que $\psi(f)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

4. Calculer $f_\star$ dans les cas suivants :

a. $f(t) = \sin t$

b. $f(t) = \cos t$

En déduire les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + x\sin x}{x^2} = \frac{1}{2}$$