Baccalauréat C Rennes juin 1978

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Résoudre dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$4x^4 + 3x^2 + 1 = 0$$

Montrer que les solutions sont conjuguées deux à deux.

2. Écrire le polynôme $4x^4 + 3x^2 + 1$ sous la forme d'un produit de deux trinômes du second degré à coefficients réels. (Cette question peut être résolue indépendamment du 1.)

3. En déduire que dans tout système de numération de base b supérieure ou égale à cinq, le nombre $\overline{40301}$ est multiple de $\overline{211}$ (ces deux nombres sont écrits en base b).
On prend b égal à neuf ; écrire, dans cette base, le quotient de $\overline{40301}$ par $\overline{211}$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans le plan affine euclidien P, on considère un triangle équilatéral ABC ; on pose $\left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\| = a$, $a > 0$.

Soit I le point du plan défini par $\overrightarrow{\text{AI}} = 2\overrightarrow{\text{AB}}$, $\quad a > 0$

1. Exprimer IA^2, IB^2 et IC^2 en fonction de a.
2. Trouver un triplet $(\alpha\ ;\ \beta\ ;\ \gamma)$ de réels tels que I soit le barycentre du système $\{(\text{A}, \alpha)\ ;\ (\text{B}, \beta)\ ;\ (\text{C}, \gamma)\}$.
3. k étant un réel donné, chercher l'ensemble Ω des points M du plan tels que :

$$M\text{A}^2 + 2M\text{B}^2 - 2M\text{C}^2 = ka^2$$

Peut-on trouver un réel k tel que le point B soit élément de l'ensemble Ω ? Démontrer qu'alors Ω est un cercle, auquel sont tangentes les droites AB et AC.

PROBLÈME **13 POINTS**

Dans tout le problème, on considère un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{\left|-x^2 + 4\right|}$$

et construire sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans le repère orthoormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
(On précisera la position de la courbe par rapport aux asymptotes).

2. On désigne par E_1 le sous-ensemble de $(\mathscr{C})$ obtenu pour $x \in [-2\ ;\ 2]$, par E_2 la courbe symétrique de E_1 par rapport à O, et par E l'ensemble $E_1 \cup E_2$.
Démontrer que :

$$x^2 + y^2 - \frac{6}{5}xy - \frac{64}{25} = 0$$

est une équation de E.

Partie B

On considère les applications affines de P dans P définies analytiquement de la façon suivante :

$$r : \quad \left\{\begin{array}{l c l} x' &=& -y\\ y' &=& x \end{array}\right.$$

$$f : \quad \left\{\begin{array}{l c l} x' &=& \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}y\\ y' &=& -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}y \end{array}\right.$$

où $(x'~;~y')$ désignent les coordonnées, dans $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, du point M' transformé du point M de coordonnées $(x~;~y)$.

1. Caractériser r et montrer que f est bijective.

2. **a.** Démontrer que l'ensemble des points de P invariants par f est une droite D.

b. Démontrer que si M est un point du plan P, H sa projection orthogonale sur D, et M' l'image de M par f on a : $\overrightarrow{HM'} = 2\overrightarrow{HM}$.

3. **a.** Déterminer l'image (γ) par f de la courbe E définie au A. En déduire que E est une ellipse dont on précisera géométriquement les axes.

b. Démontrer que la courbe E est globalement invariante par :

$$f^{-1} \circ r \circ f$$

Partie C

Soit θ une application affine du plan P dans lui-même, telle que

$$(1) \qquad \left(f^{-1} \circ \theta \circ f\right)(E) = E$$

1. Démontrer que la relation (1) est équivalente à $\theta(\gamma) = \gamma$.
En déduire que l'application θ est bijective.

2. Démontrer que $\theta(\text{O}) = \text{O}$.

3. Démontrer que θ est une isométrie : on pourra écrire la matrice de l'application linéaire associée dans la base $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

4. Démontrer que l'ensemble des applications θ vérifiant (1), muni de la loi de composition, est un groupe isomorphe au groupe orthogonal du plan vectoriel associé à P.