

Baccalauréat C Rouen juin 1978

EXERCICE 1

3 POINTS

1. Linéariser l'expression :

$$f(x) = \cos^3 x \cdot \sin^2 x$$

où x est réel.

2. Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

EXERCICE 2

4 POINTS

Pour tout entier naturel n calculer le reste de la division par 7 de 5^n et de 4^n .
Comment faut-il choisir n pour que le nombre $5^n - 4^n$ soit divisible par 7?

PROBLÈME

13 POINTS

Partie A

\mathbb{C} désigne l'ensemble des nombres complexes. À tout couple $(a; b)$ élément de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, on associe l'application $\varphi_{a, b}$ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , définie par :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad \varphi_{a, b}(z) = az + b\bar{z} \quad (\bar{z} \text{ étant le conjugué de } z)$$

1. Donner la nature de $\varphi_{1, 0}$ et de $\varphi_{-1, 0}$.
2. Démontrer que $\varphi_{a, b} = \varphi_{a', b'}$ si et seulement si $(a, b) = (a', b')$.
(On pourra par exemple calculer $\varphi_{a, b}(1)$ et $\varphi_{a, b}(i)$).
3. Démontrer que $\varphi_{a, b}$ est involutive si et seulement si $a, b, a\bar{a}$ et \bar{b} vérifient simultanément deux relations que l'on précisera.

Partie B

Soit P un plan affine euclidien orienté et $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé direct de P .

Soit le nombre complexe $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1 + 2i)$.

On désigne par f l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe complexe z associe le point M_1 d'affixe complexe $z_1 = \varphi_{\frac{3}{4}i, 1 + \frac{3}{4}i}(z)$ et par h l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe complexe z associe le point M_2 d'affixe complexe $z_2 = \varphi_{0, u}(z)$.

I.

1. Calculer, pour tout point M de P de coordonnées $(x; y)$, les coordonnées $(x_1; y_1)$ de $M_1 = f(M)$ et les coordonnées $(x_2; y_2)$ de $M_2 = h(M)$.
2. Démontrer que f est une application affine involutive. Donner la nature de f et ses éléments caractéristiques,
3. Démontrer que h est une symétrie orthogonale par rapport à une droite dont on déterminera une équation,

II.

À tout nombre réel θ on associe l'application $g_\theta = f \circ r_\theta \circ f$, où r_θ est la rotation de centre O et dont une détermination de la mesure de l'angle est θ .

Soit $\mathcal{G} = \{g_\theta / \theta \in \mathbb{R}\}$.

1. a. Démontrer que \mathcal{G} est stable pour la loi \circ .
b. Démontrer que \mathcal{G} muni de la loi \circ est un groupe commutatif.
2. On définit dans P la relation \mathcal{R} par :

$$(\forall (M, N) \in P^2) \quad [M \mathcal{R} N \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, N = g_\theta(M)].$$

Démontrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence,

3. Déterminer la classe d'équivalence du point O pour la relation \mathcal{R} .
4. Soit A le point de coordonnées (0; 2).
a. Démontrer que les coordonnées de $g_\theta(A)$ sont

$$(2 \sin \theta ; 3 \sin \theta + 2 \cos \theta)$$

- b. Donner une équation de la classe d'équivalence Γ_A du point A pour la relation \mathcal{R} .
- c. On considère les deux fonctions numériques de variable réelle F_1 et F_2 définies par :

$$F_1(x) = \frac{3}{2}x + \sqrt{4-x^2} \quad \text{et} \quad F_2(x) = \frac{3}{2}x - \sqrt{4-x^2}.$$

On appelle \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 leurs courbes représentatives respectives dans P muni du repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Démontrer que $\Gamma_A = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Étudier F_1 et F_2 et tracer Γ_A . (On prendra $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 2$, (unité le cm) et 3,6 comme valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de $\sqrt{13}$).

5. Déterminer une équation de $\Gamma_{A'}$, transformée de Γ_A par h .
Quelle est la nature de $\Gamma_{A'}$?
Tracer $\Gamma_{A'}$ sur la même feuille que Γ_A .
Quelle est la nature de $\Gamma_{A'}$?