

☞ Baccalauréat C Rouen septembre 1978 ☞

EXERCICE 1

4 POINTS

Soit \mathcal{M} l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & a+b \\ b & a \end{pmatrix}$ lorsque a et b sont deux éléments de \mathbb{R} .

1. Montrer que \mathcal{M} , muni de l'addition des matrices et de la multiplication d'une matrice par un réel possède une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} . Trouver une base de cet espace vectoriel.
2. P étant un plan vectoriel euclidien, on définit l'application linéaire φ de P vers P , dont la matrice dans la base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) est : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle un automorphisme involutif de P ?

EXERCICE 2

3 POINTS

L'application linéaire φ est celle définie dans la deuxième question de l'exercice 1 précédent.

λ étant un réel donné, on pose $E_\lambda = \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_P)$ (noyau de l'application linéaire $\varphi - \lambda \text{id}_P$).

1. Montrer que : $E_\lambda = \{ \vec{u} \in P : \varphi(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \}$.
2. Montrer qu'il existe deux valeurs réelles distinctes de λ , pour lesquelles $E_\lambda \neq \{ \vec{0} \}$. (On notera λ_1 la plus petite de ces valeurs, λ_2 l'autre).
3. Montrer que λ_1 et λ_2 sont deux droites vectorielles.

PROBLÈME

13 POINTS

Soit $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des suites numériques (application de \mathbb{N} dans \mathbb{R}). On note U la suite de terme général U_n .

On considère le sous-ensemble \mathcal{T} de \mathcal{S} des suites U vérifiant la propriété suivante :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (U_{n+2} = -4U_{n+1} + 5U_n).$$

Partie A

1. Montrer que \mathcal{T} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{S} .
2. Soit u et v deux suites de \mathcal{T} . Démontrer que $u = v$ si et seulement si $(u_0, u_1) = (v_0, v_1)$.
3. Soit a et b deux suites de \mathcal{T} telles que

$$a_0 = 1, a_1 = 0, b_0 = 0, b_1 = 1.$$

Démontrer que pour tout u de \mathcal{T} :

$$u = u_0 \cdot a + u_1 \cdot b.$$

En déduire la dimension de \mathcal{T} .

4. On considère la suite s de \mathcal{T} définie par $s_0 = 6$ et $s_1 = 0$.
Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , s_{2n} est strictement positif et s_{2n+1} est strictement négatif.

Partie B

On considère la suite géométrique t de premier terme 1 et de raison α , α étant un réel non nul.

1. Déterminer α pour que t appartienne à \mathcal{T} . En déduire une nouvelle base de \mathcal{T} .
2. Calculer dans cette base les coordonnées de la suite s définie en A 4. En déduire que la suite s n'est pas convergente.

Partie C

Soit E un espace affine euclidien de dimension 2 muni du repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. On considère la suite des points M de E de coordonnées $(n; s)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
Démontrer que les points M_{2n} appartiennent à la courbe (\mathcal{C}) d'équation $y = 5(1 + 5^{x-1})$ et que les points M_{2n+1} appartiennent à la courbe (\mathcal{C}') d'équation $y = 5(1 - 5^{x-1})$.
2. Étudier la fonction f définie par :

$$f(x) = 5(1 + 5^{x-1}).$$

Tracer les courbes (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') .

3. Calculer l'aire \mathcal{A}_λ de la portion de plan limitée par les courbes (\mathcal{C}) ; (\mathcal{C}') et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$. ($\lambda < 0$),
Déterminer la limite de \mathcal{A}_λ quand λ tend vers $-\infty$.

Partie D

1. On désigne par x_n et y_n les coordonnées de tout point M_n . Déterminer les réels a, b, c, d tels que l'on ait, quelque soit n :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= ax_n + b \\ y_{n+1} &= cy_n + d \end{cases}$$

2. Soit F l'application affine de E dans E qui à tout point $M(x; y)$ associe $M''(x''; y'')$ tel que :

$$\begin{cases} x'' &= ax + b \\ y'' &= cy + d \end{cases}$$

Démontrer que F est une bijection et déterminer le point O_1 tel que $F(O_1) = O$.

Démontrer qu'il existe une translation T et une application affine G de E dans E telles que :

$$F = G \circ T \quad \text{et} \quad G(O) = O.$$

Pour tout point $M(x; y)$ d'image $M'(x'; y')$ par G exprimer x' et y' à l'aide de x et de y .

3. Démontrer que pour l'application G :
 - a. l'ensemble des points invariants est une droite (D).
 - b. il existe une droite vectorielle $\vec{\Delta}$ telle que pour tout point M d'image M' par G le vecteur $\vec{MM'}$ appartient à $\vec{\Delta}$.
 - c. il existe un nombre réel k tel que pour tout point M (d'image M') de projection H sur (D) suivant la direction $\vec{\Delta}$ on ait $\vec{HM'} = k\vec{HM}$.
Préciser k .