Baccalauréat C Toulouse juin 1978

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On considère l'application f de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui au point M de coordonnées x et y fait correspondre le point M' de coordonnées x' et y' définies par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & \frac{}{5}x + \frac{}{5}y + m \\ y' & = & \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2 \end{array}\right.$$

où m est un paramètre réel.

1. Démontrer que f est une isométrie ponctuelle négative (ou antidéplacement).
2. Pour quelle valeur de m l'application f est-elle une symétrie ponctuelle orthogonale par rapport à une droite affine de $\mathcal{E}$?
3. On suppose $m = 0$. Trouver une droite affine $\mathcal{D}$ et un vecteur $\vec{\text{V}}$ tels que $\vec{\text{V}}$ appartienne à la direction de $\mathcal{D}$ et que $f = S_{\mathcal{D}} \circ t_{\vec{\text{V}}} = t_{\vec{\text{V}}} \circ S_{\mathcal{D}}$, où $S_{\mathcal{D}}$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$ et où $t_{\vec{\text{V}}}$ est la translation de vecteur $\vec{\text{V}}$.
   On donnera une équation de $\mathcal{D}$ et les coordonnées de $\vec{\text{V}}$.

EXERCICE 2 **2 POINTS**

Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20.
On tire successivement deux boules, en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage (les tirages sont supposés équiprobables).
On désigne par X et Y les numéros de la 1$^{\text{re}}$ et 2$^{\text{e}}$ boule tirées, et on pose Z = X + Y et T = X − Y.
Un espace probabilisé $\left(\Omega,\ \mathcal{P}(\Omega),\ p\right)$ rendant compte de l'expérience est donc formé par l'ensemble Ω des couples (X, Y) d'entiers tels que $1 \leqslant \text{X} \leqslant 20$ et $1 \leqslant \text{Y} \leqslant 20$, avec $p(\text{X, Y}) = 400$ pour tout (X, Y) de Ω.

1. Calculer les espérances mathématiques de X et de Y. En déduire celles de Z et T.
2. Calculer la probabilité d'avoir le produit ZT égal à 48.

PROBLÈME **2 POINTS**

On rappelle que si f et g sont des fonctions numériques continues sur l'intervalle fermé borné $[a\ ;\ b]$, avec $a < b$, alors f et g sont intégrables sur $[a\ ;\ b]$, et que si $f(t) \leqslant g(t)$ pour tout t de $[a\ ;\ b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,\text{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\text{d}t.$$

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

Partie A

1. On considère la fonction de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \operatorname{tg} x$.

Démontrer que c'est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite du problème, on désignera par φ la fonction réciproque de cette bijection. Préciser le domaine de définition de φ, ainsi que les nombres $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi\left(\sqrt{3}\right)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

Tracer dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \operatorname{tg} x$; en déduire sur le même graphique la courbe représentative de la fonction φ.

2. Démontrer que $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Calculer $\varphi'(0)$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{x}$.

Démontrer alors que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $x \longmapsto \dfrac{\varphi(x)}{x}$ pour $x \neq 0$ et par : $0 \longmapsto 1$, est continue en 0. Démontrer ensuite qu'elle est continue sur tout $\mathbb{R}$.

3. En étudiant les variations des deux fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définies par $x \longmapsto x - \varphi(x)$ et par $x \longmapsto x - x^3 - \varphi(x)$, démontrer que :

$$0 \leqslant x - \varphi(x) \leqslant \frac{x^3}{3} \quad \text{pour tout} \quad x > 0.$$

Partie B

Dans toute la suite du problème, on considère la fonction f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et } f(0) = 1.$$

(on ne cherchera pas à calculer l'intégrale qui définit f).

1. Démontrer que :

$$1 - f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t - \varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{si } x > 0$$

2. En utilisant A 3. et B 1., démontrer que :

$$0 \leqslant 1 - f(x) \leqslant \frac{x^2}{9} \quad \text{si } x > 0.$$

En déduire que f est continue à droite en 0 et que la dérivée à droite de f en 0 est 0.

3. Démontrer que :

$$0 \leqslant \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\operatorname{Log} x \quad \text{si } x \geqslant 1.$$

où $\operatorname{Log} x$ désigne le logarithme népérien de x.

En écrivant :

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t,$$

démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Partie C

1. Vérifier que :

$$x^2 f'(x) = -\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t, \quad \text{pour tout } x > 0.$$

2. On pose $g(x) = x^2 f'(x)$ pour tout $x > 0$. Vérifier que :

$$xg'(x) = -\varphi(x) + \frac{x}{1+x^2}.$$

3. Étudier les variations de la fonction h de $]0\,;\,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie par $h(x) = xg'(x)$.

En déduire le signe de $g'(x)$, puis de $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

4. Rassembler les résultats de B et C pour donner l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.