Baccalauréat C Toulouse septembre 1978

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit f la fonction réelle de variable réelle qui, à x, associe

$$f(x) = \left|\mathrm{e}^{-2x} - 2\mathrm{e}^{-x}\right|$$

1. Étudier les variations de f.

   Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x_0 = -\mathrm{Log}\,2$. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé.
2. λ étant un réel supérieur ou égal à $\mathrm{Log}\,2$, calculer l'aire de l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{lclcl} -\mathrm{Log}\,2 & \leqslant & x & \leqslant & \lambda\\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x). \end{array}\right.$$

   Soit $\mathscr{A}(\lambda)$ cette aire.
3. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Une urne contient $n+8$ boules distinctes de trois couleurs :
n boules bleues (n entier $\geqslant 2$)
5 boules rouges
3 boules vertes.

1. On tire deux boules de l'urne sans remise et on se place dans l'hypothèse de l'équiprobabilité.

   Une règle du jeu a été établie de la façon suivante :
   - on gagne quand on tire deux boules de la même couleur
   - on perd quand on tire deux boules de couleurs distinctes.

   Calculer en fonction de n la probabilité p_n de gain puis la probabilité q_n de perte.

   Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$. Ce résultat était-il prévisible ?
2. On effectue maintenant une série de dix tirages de deux boules comme au 1. en remettant chaque fois les deux boules tirées dans l'urne.

   Calculer en fonction de n la probabilité p_n pour obtenir 9 fois et 9 fois seulement un tirage de deux boules de la même couleur.

   Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$. Ce résultat était-il prévisible ?

PROBLÈME **4 POINTS**

On donne :
$\mathscr{P}$ plan vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\left(\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$
$\mathscr{D}_1$, droite vectorielle de $\mathscr{P}$ de base $\left(\vec{\imath}\right)$
$\mathscr{D}_2$, droite vectorielle de $\mathscr{P}$ de base $\left(\vec{\jmath}\right)$
$\mathscr{A}$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui laissent tout vecteur de $\mathscr{D}_1$ invariant et la droite vectorielle $\mathscr{D}_2$ globalement invariante.

Partie A

1. Montrer que toute application de $\mathscr{A}$ a une matrice dans la base $\left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix} \quad \text{avec } a \text{ paramètre de } \mathbb{R}-\{0\}.$$

On notera φ_a l'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.

2. Donner l'image par φ_a de la droite vectorielle d'équation cartésienne dans la base $\left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$:

$$\alpha x+\beta y=0 \text{avec } (\alpha\ ;\ \beta)\neq(0\ ;\ 0) \text{ et } (\alpha\ ;\ \beta)\in\mathbb{R}^2$$

En déduire que les seules droites laissées globalement invariantes par φ_a avec $a\neq 1$ sont $\mathscr{D}_1$, et $\mathscr{D}_2$.

Partie B

On donne :
P plan affine euclidien, associé à $\mathscr{P}$, muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.
Soient les points A $(1\,;\,0)$; B$(-1\ ;\ 0)$; C $(0\,;\,1)$
Soit $\mathscr{B}_b$ l'ensemble des applications affines de P dans P qui laissent O et A invariants et qui transforment C en C$'$ tel que $\overrightarrow{\text{OC}} = b\overrightarrow{\text{OC}'}$ avec b paramètre fixe de $\mathbb{R}-\{0\ ;\ 1\}$.

1. Montrer que $\mathscr{B}_b$ ne contient qu'une seule application que l'on notera f_b dont on donnera l'expression analytique dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.
Caractériser cette application pour $b=1$; puis pour $b=-1$.
2. m étant la projection orthogonale d'un point M quelconque de P sur la droite (AB) ; M' étant l'image de M par f_b calculer $\overrightarrow{mM'}$ en fonction de $\overrightarrow{mM}$.
3. On désigne par E_b l'image par f_b du cercle Ω de centre O de rayon OA.
Déterminer E_b pour $|b|=1$. Déterminer E_b pour $|b|\neq 1$; préciser les éléments remarquables.

Partie C

Soit C l'ensemble des applications affines de P dans P conservant globalement le cercle Ω et conservant globalement la droite (AB).

1. Montrer que C est non vide et que toute application de C est bijective.
2. Montrer que C est la réunion de deux ensembles non vides notés C_A et C_B, C_A étant l'ensemble des applications de C pour lesquelles A est invariant et C_B l'ensemble des applications de C pour lesquelles A est transformé en B.
En déduire que toute application de C laisse O invariant.
3. Soit F une application quelconque de C et u son endomorphisme associé.
Montrer que u transforme tout vecteur de norme 1 en un vecteur de norme 1.
En déduire que u conserve la norme de tout vecteur de $\mathscr{P}$ (c'est-à-dire $\forall\vec{V}\in\mathscr{P},\ \left\|u\left(\vec{V}\right)\right\| = \left\|\vec{V}\right\|$).
Quelle est la nature de F ?
4. En déduire que C ne contient que quatre applications que l'on caractérisera,

Partie D

Soit $\mathscr{E}_b$ l'ensemble des applications affines de P dans P transformant le cercle Ω en E_b et qui laissent la droite (AB) globalement invariante.

1. Montrer que l'application f_b du B est une application de $\mathscr{E}_b$.

2. Soit φ une application de $\mathscr{E}_b$, montrer que $f_b^{-1} \circ \varphi$ est une isométrie ponctuelle de P.

3. Démontrer que $\mathscr{E}_b$ ne contient que quatre applications affines que l'on déterminera.