

Baccalauréat C Caen juin 1979

EXERCICE 1

3 POINTS

1. Trouver, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 3^n par 8.
2. Quel est l'ensemble des entiers naturels n tels que le nombre $3^n \cdot n - 9n + 2$ soit divisible par 8 ?

EXERCICE 2

4 POINTS

Dans un plan affine euclidien P , on donne un triangle ABC rectangle en A , tel que $d(A, C) = 2d(A, B) = 2a$ où a est un nombre réel positif donné et $d(A, C)$ désigne la distance des points A et C .

1. Déterminer et construire le point C barycentre du système de points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, -2 et 1.
Déterminer et construire le point K barycentre du système de points A, B et C affectés respectivement des coefficients $-2, 3$ et 3.
2. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M tels que

$$4 \cdot \left\| 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| -2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \right\|$$

Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M tels que

$$2MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = -5a^2$$

PROBLÈME

13 POINTS

Soit m un réel quelconque. On précise que pour tout x strictement positif, la notation x^m désigne $e^{m \log x}$ où $\log x$ représente le logarithme népérien de x .

\mathbb{R}_+^* désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs et \mathbb{R}^* l'ensemble des nombres réels différents de zéro.

Les parties B et C suivantes sont indépendantes.

Partie A

1. À tout réel m , on associe la fonction f_m de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R}_+^* définie par

$$f_m(x) = x^m.$$

Étudier, suivant les différentes valeurs de m , les variations de cette fonction. On appelle \mathcal{C}_m la courbe représentative de f_m dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Déterminer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_m au point d'abscisse 1.

2. Construire sur une même figure $\mathcal{C}_{-1}, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_{\frac{1}{2}}, \mathcal{C}_1$ et \mathcal{C}_2 .
3. Montrer que pour $m \neq 0$ la fonction f_m possède une fonction réciproque égale à $f_{\frac{1}{m}}$. Montrer qu'il existe une application affine du plan qui transforme la courbe \mathcal{C}_m en $\mathcal{C}_{\frac{1}{m}}$.

Partie B

À tout réel m on associe la fonction g_m de \mathbb{R}^* vers \mathbb{R}_+^* définie par :

$$g_m(x) = e^{m|\log|x||}.$$

1. Montrer que g_m est paire,
2. Déterminer un intervalle I de \mathbb{R} . tel que les restrictions de g_m et de f_m à I soient égales.
3. Étudier, suivant les différentes valeurs de m , les variations de la fonction g_m .
4. g_m est-elle continue en $x = 1$? Est-elle dérivable en ce point ?
5. Donner, sur des figures différentes, dans des plans rapportés à des repères orthonormés, les allures des courbes représentatives des fonctions g_{-1} , $g_{-\frac{1}{2}}$, g_0 , $g_{\frac{1}{2}}$, g_1 et g_2 .
6. Comparer, pour tout x réel non nul, $g_m\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g_m(x)$.

Partie B

On oriente le plan affine euclidien P en considérant que le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) est direct. Soit V le plan vectoriel euclidien orienté associé. Soit m un nombre réel non nul et ψ_m l'endomorphisme de V défini par sa matrice A_m dans la base (\vec{i}, \vec{j}) :

$$A_m = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & \frac{1+m^2}{m^2-1} \end{pmatrix}$$

Soit F_m l'application affine de P associée à Ψ_m et qui laisse le point J de coordonnées $(1; 1)$ invariant.

1. Montrer que Ψ_m est involutive.
2. Quelle est la nature de l'application F_m ? Préciser ses éléments caractéristiques,
3. Soit Γ_m l'image de C_m par l'application F_m (C_m est la courbe définie, en A 1.). Montrer qu'il existe une rotation R_m telle que Γ_m soit l'image de $C_{\frac{1}{m}}$ par la rotation (on pourra utiliser le résultat de A 3.).
Quel est le centre de cette rotation ?
4. Soit θ_m l'angle de la rotation R_m . Déterminer $\text{tg } \theta_m$ en fonction de m .