

## ∞ Baccalauréat C Pondichéry juin 1979 ∞

### EXERCICE 1

3 POINTS

Soit  $B$  un entier naturel non nul.

Dans tout ce qui suit, les écritures surlignées représentent des nombres écrits en base  $B$ .

1. Montrer que  $\overline{132}$  est divisible par  $B + 1$  et  $B + 2$ .  
Pour quelles valeurs de  $B$ ,  $\overline{132}$  est-il divisible par six ?
2. Montrer que  $A = \overline{1320}$  est divisible par six.
3. On pose  $C = \overline{1430}$ . Quelle est le p. g. c. d. de  $A$  et  $C$  ?

### EXERCICE 2

4 POINTS

$A, B, C$  sont trois points non alignés d'un plan affine  $P$  et  $P'$  le plan  $P$  privé de la droite  $AB$ .

1. Soit  $E$  l'ensemble des couples  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$  tels que  $a + b + 1 \neq 0$ .  
Démontrer que l'application  $f$  qui à tout élément  $(a, b)$  de  $E$  associe le barycentre  $G$  de  $(A, a)$ ,  $(B, b)$ ,  $(C, 1)$  est une bijection de  $E$  sur  $P'$ .
2. On considère l'application  $g$  de  $P'$  dans  $P'$  qui au point  $G$  associe le point  $G'$  barycentre de  $(A, b)$ ,  $(B, a)$ ,  $(C, 1)$ .
  - a. Déterminer l'ensemble des points invariants par  $g$ .
  - b. Démontrer que  $\overrightarrow{GG'}$  appartient à une direction indépendante de  $G$ .
  - c. Démontrer que le milieu de  $(G, G')$  est sur une droite fixe et en déduire la nature de  $g$ .

### PROBLÈME

13 POINTS

On rappelle que l'ensemble  $\mathcal{A}$  des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de l'addition des applications, et du produit d'une application par un réel est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

#### Partie A

On note  $e_1$  et  $e_2$  les deux applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies respectivement par

$$e_1(x) = e^{-\frac{x}{2}} \sin x \quad \text{et} \quad e_2(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cos x,$$

et on appelle  $\mathcal{F}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{A}$  engendré par  $e_1$  et  $e_2$ .

1. Démontrer que  $(e_1, e_2)$  est une base de  $\mathcal{F}$ .
  - a. Démontrer que tout élément  $f$  de  $\mathcal{F}$  est dérivable, et que sa dérivée  $f'$  appartient à  $\mathcal{F}$ .
  - b. Écrire la matrice dans la base  $(e_1, e_2)$  de l'endomorphisme  $D$  de  $\mathcal{F}$ , qui à  $f$  associe  $f'$ .  
Établir que  $D$  est bijective, et définir l'application réciproque  $D^{-1}$ .
  - c. Utiliser le résultat précédent pour calculer l'intégrale

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^{-\frac{x}{2}} (\sin x + \cos x) dx.$$

## Partie B

Dans cette partie, on désigne par  $f$  l'application de  $J = \left[-\frac{\pi}{4}; +\infty\right[$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}} (\sin x + \cos x),$$

et par  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Résoudre dans  $J$  l'équation  $f(x) = 0$ .

Étudier le sens de variation de  $f$  sur l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{4}; +\frac{7\pi}{4}\right]$ .

On notera  $\alpha$  le réel de l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ , et on prendra  $\alpha = \frac{\pi}{9}$ ; d'autre part, on ne cherchera pas à déterminer les valeurs maximale et minimale).

2. a. Démontrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $J$ ,  $|f(x)| \leq \sqrt{2}e^{-\frac{x}{2}}$ .  
En déduire que  $f$  admet une limite finie en  $+\infty$ .
- b. Soit  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  les représentations graphiques dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  des applications  $g$  et  $h$  de  $J$  dans  $\mathbb{R}$  définies par

$$g(x) = \sqrt{2}e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{ety} \quad h(x) = -\sqrt{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

Calculer les abscisses des points communs à  $C$  et  $\Gamma$  d'une part, à  $C$  et  $\Gamma'$  d'autre part.

Établir qu'en tout point commun à  $C$  et  $\Gamma$  (respectivement : à  $C$  et  $\Gamma'$ ), les deux courbes admettent la même tangente.

- c. Soit  $M$  le point de coordonnées  $(x; y)$  sur  $C$ ; calculer en fonction de  $y$  l'ordonnée du point  $M'$  d'abscisse  $x + 2\pi$  sur  $C$ .
- d. Utiliser les résultats précédents pour construire  $C$ . On commencera par mettre en place les courbes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ , puis l'arc de  $C$  correspondant à l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{4}; +\frac{7\pi}{4}\right]$ .

On donne :

$x$	$-\frac{9\pi}{8}$	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{8}$
$e^x$	0,03	0,04	0,14	0,21	0,67

## Partie C

Les solutions dans l'intervalle  $J = \left[-\frac{\pi}{4}; +\infty\right[$  de l'équation  $f(x) = 0$  forment la suite de réels  $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

On note comme au A :

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) \, dx \quad \text{puis} \quad I_1 = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} f(x) \, dx$$

et d'une manière générale, pour tout entier naturel  $k$  :

$$I_k = \int_{-\frac{\pi}{4} + k\pi}^{-\frac{\pi}{4} + (k+1)\pi} f(x) \, dx.$$

1. En utilisant les résultats du A, trouver une primitive  $F$  de  $f$  sur  $J$ , ayant la propriété suivante : il existe un réel  $\lambda$  strictement positif tel que, pour tout réel  $x$  appartenant à  $J$ ,  $F(x + \pi) = -\lambda F(x)$ .

En déduire une expression simple de  $I_{k+1}$  en fonction de  $I_k$  et de  $\lambda$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} |I_k|$ .

Exprimer  $S_n$  en fonction de  $I_0$ ,  $\lambda$  et  $n$ .

$S_n$  admet-elle une limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?