

❧ Baccalauréat C Reims juin 1979 ❧

EXERCICE 1

4 POINTS

Soit un espace vectoriel euclidien E rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et soit l'endomorphisme g de E dans E défini par :

$$\begin{cases} g(\vec{i}) = \frac{1}{3}(-\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) \\ g(\vec{j}) = \frac{1}{3}(2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}) \\ g(\vec{k}) = \frac{1}{3}(-2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}) \end{cases}$$

1. Montrer que g est une transformation orthogonale de E .
Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par g . Caractériser g .
2. Déterminer l'image par g du plan vectoriel engendré par les vecteurs $(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ et $(2\vec{i} - \vec{k})$.

EXERCICE 2

4 POINTS

n est un entier naturel de \mathbb{N}^* et k un entier relatif quelconque.

On pose :

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad E_n = \{z_k : k \in \mathbb{Z}\}$$

1. Quel est le nombre d'éléments de E_n ?
Démontrer que (E_n, \times) est un groupe abélien G .
Représenter E_{12} dans le plan complexe.
2. Soit G' un sous-groupe de G .
 - a. Démontrer que si z_k appartient à G' et si p est un entier relatif quelconque, alors z_{kp} appartient à G' .
 - b. En déduire que si G' contient z_{k_1} et z_{k_2} il contient z_d où d est le p.g.c.d de k_1 et k_2 .
3. Utiliser le 2. pour trouver tous les sous-groupes de E_{12} .

PROBLÈME

12 POINTS

Soit la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par (J 2 points)

$$f_m(x) = \text{Log} \left| \frac{mx+1}{x+m} \right|.$$

où m est un paramètre réel. On appelle (\mathcal{C}_m) la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

On appelle A le point de coordonnées $(-1; 0)$ et B le point de coordonnées $(1; 0)$.

Partie A

1. Étudier les fonctions f_m dans les cas particuliers suivants :

$$m = 0, \quad m = -1 \quad \text{et} \quad m = 1.$$

Tracer les courbes (\mathcal{C}_0) , (\mathcal{C}_{-1}) et (\mathcal{C}_1) dans un repère \mathcal{R} .

Dans toute la suite, on supposera $m \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

2. Donner, en les justifiant, les ensembles de définition, de continuité, de dérivabilité de f_m . On désignera par la suite par \mathcal{D}_{f_m} l'ensemble de définition de f_m .

- a. Démontrer que toutes les courbes (\mathcal{C}_m) passent par A et B.
- b. Démontrer que les ensembles de définition de f_m et $f_{\frac{1}{m}}$ sont égaux et que, pour tout x de ces ensembles

$$f_{\frac{1}{m}}(x) = -f_m(x)$$

En déduire que (\mathcal{C}_m) et $(\mathcal{C}_{\frac{1}{m}})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

- c. Démontrer l'équivalence : $x \in \mathcal{D}_{f_{-m}} \iff (-x) \in \mathcal{D}_{f_m}$.
Démontrer : si $x \in \mathcal{D}_{f_{-m}}$, $f_{-m}(x) = f_m(-x)$; en déduire que (\mathcal{C}_m) et (\mathcal{C}_{-m}) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
- d. Déduire des questions précédentes, qu'il suffit d'étudier f_m et de tracer (\mathcal{C}_m) pour $m > 1$ pour obtenir les courbes (\mathcal{C}_m) pour tout élément de $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

3. On suppose dans cette question $m > 1$.

- a. Calculer $f'_m(x)$, f'_m étant la fonction dérivée de f_m .
- b. Étudier les limites de f_m aux bornes des intervalles de définition de f_m ; en déduire pour (\mathcal{C}_m) l'existence d'asymptotes dont on précisera les équations.
- c. Donner le tableau de variations de f_m (on ne tracera pas la courbe (\mathcal{C}_m))

Partie B

Dans cette question $m = 2$;

On pourra prendre 0,7 comme valeur approchée, de $\log 2$.

1. Étudier f_2 et tracer (\mathcal{C}_2) dans un repère \mathcal{R} . Soit I_2 le point d'intersection de (\mathcal{C}_2) et de son asymptote parallèle à la droite (O, \vec{i}) .
Démontrer que I_2 est centre de symétrie de (\mathcal{C}_2) .
2. En utilisant A 3. déduire alors la construction de $(\mathcal{C}_{\frac{1}{2}})$ et (\mathcal{C}_{-2}) dans le même repère que (\mathcal{C}_2) .
3. Soit g la restriction de f_2 à $\left] -2 ; -\frac{1}{2} \right[$.
 - a. Démontrer que g est une bijection de $\left] -2 ; -\frac{1}{2} \right[$ sur \mathbb{R} .
 - b. Définir analytiquement g^{-1} et construire dans un nouveau repère \mathcal{R} la courbe représentative de g .