Baccalauréat C Aix-Marseille septembre 1980

EXERCICE 1

On considère un dé cubique dont les faces portent les nombres (-2), (-2), 1, 1, 1, a. Chaque face a la même probabilité d'apparition.

1. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque lancer du dé fait correspondre le nombre apparu. Donner la loi de probabilité p de X, suivant les valeurs de a. Déterminer l'espérance mathématique de X ; pour quelle valeur de a est-elle nulle ?

2. Dans cette question on suppose que $a = 1$; on lance le dé trois fois de suite et on désigne par Y la variable aléatoire qui à chaque épreuve fait correspondre la somme des trois nombres apparus. Déterminer la loi de probabilité q de Y. Déterminer la fonction de répartition de Y.

EXERCICE 2

Soit z_0, z_1, z_2 les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $g(z) = 0$ avec

$$g(z) = z^3 - 10\mathrm{i}z^2 - 4(3-4\mathrm{i})z + 40(4+3\mathrm{i}).$$

1. Sachant que z_0 est imaginaire pur ($z_0 = \mathrm{i}e^x$, $e^x \in \mathbb{R}$), déterminer $f(z)$ telle que $(z - z_0)f(z) = g(z)$.

En déduire le calcul de z_1 et z_2 (on notera z_1 celle des racines qui a sa partie réelle positive).

2. On désigne par M_1, M_2 et M_3 les images respectives dans le plan complexe de z_0, z_1 et z_2.

a. Déterminer l'affixe de l'isobarycentre du triangle $M_0M_1M_2$.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S qui laisse M_0 invariant et telle que $M_2 = S(M_1)$.

PROBLÈME

Partie A

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{M}_2$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, le même ensemble muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau unitaire ; on notera e et 1 respectivement la matrice nulle et la matrice unité.

1. Étant donné l'élément $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2$, on considère l'ensemble

$$\mathrm{E} = \left\{M / M \in \mathscr{M}_2,\ \exists(a,\ b) \in \mathbb{R}^2, \quad M = a\mathrm{A} + b\mathrm{I}.\right\}$$

a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2$ dont une base est (A, I).

b. Vérifier que $\mathrm{A}^2 = -\mathrm{A} + 2\mathrm{I}$; en déduire que la multiplication est une loi de composition interne dans E et que E muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau commutatif unitaire, que A est inversible et que A^{-1} appartient à E.

2. **a.** Vérifier que dans E l'équation $X2 = X$ admet quatre solutions, la matrice nulle θ, la matrice unité I, et deux autres matrices P et Q que l'on exprimera dans la base (A, I).
   On désignera par P celle qui est de la forme k(A - I), $k \in \mathbb{R}$.
   Vérifier que PQ = QP = θ et que P + Q = I. Déterminer les coefficients des matrices P et Q.

   b. Démontrer que (P, Q) est une base de E. Comment s'expriment I, A, le produit des matrices M = αP + βQ et M' = α'P + β'Q, la matrice M^n dans cette base.

   c. Démontrer que M = αP + βQ est inversible si, et seulement si, $\alpha\beta \neq 0$. Exprimer alors M^{-1} dans la base (P, Q).

3. Démontrer que dans E l'équation X^2 = I admet quatre solutions I, $-$I et deux autres solutions S et $-$S que l'on exprimera dans la base (P, Q). Déterminer les coefficients des matrices S et $-$S.

4. Soit π un plan vectoriel muni d'une base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et soit g l'endomorphisme de π dont la matrice dans cette base, est G = $\dfrac{1}{2}$P + $\dfrac{1}{3}$Q.
   $\overrightarrow{V_0}$ étant un élément de π et, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\overrightarrow{V_{k+1}} = g\left(\overrightarrow{V_k}\right)$, on pose

$$\overrightarrow{W_k} = \sum_{k=0}^{n} \overrightarrow{V_k}.$$

   Calculer les coordonnées u_n et v_n de $\overrightarrow{W_n}$ en fonction de x_0 et y_0, coordonnées de $\overrightarrow{V_0}$, et de n.
   Quelles sont les limites de u_n et v_n lorsque n tend vers l'infini.

Partie B

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{F}$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel de $\mathbb{R}$. On considère les deux éléments de $\mathscr{F}$, u et v définis par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, \quad v(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

1. On considère l'ensemble

$$\mathscr{E} = \left\{f \in \mathscr{F}, \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, f = \alpha u + \beta v\right\}.$$

   a. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$ dont une base est $(u,\ v)$.

   b. On note d et l les applications définies par

$$\forall f \in \mathscr{E},\ d(f) = f' \text{ fonction dérivée}$$
$$l(f) = f' + \beta v \text{ si } f = \alpha u + \beta v.$$

   Montrer que d et l sont des endomorphismes de $\mathscr{E}$, dont on déterminera les matrices respectives D et L dans la base $(u,\ v)$.
   Vérifier que $L = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \cdot D$. En déduire D^{-1}, puis que tout élément de $\mathscr{E}$ admet une primitive dans $\mathscr{E}$.

2. **a.** Étudier les variations de la fonction f, élément de $\mathscr{E}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

   Tracer sa courbe représentative dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

b. Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de la portion du plan P, ensemble des points M dont les coordonnées vérifient

$$\left\{\begin{array}{lcccc} 1 & \leqslant & x & \leqslant & \lambda \\ f(x) & \leqslant & y & \leqslant & 0 \end{array}\right. \quad \lambda \text{ étant un réel supérieur à } 1$$

Calculer $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda)$.