Baccalauréat C groupe 4 [1] juin 1980

EXERCICE 1 **4 POINTS**

E désigne un espace affine euclidien de dimension trois. La distance entre deux points quelconques M et N de E est notée MN.

1. Soit trois points A, B et C non alignés et le point I défini par $\overrightarrow{\text{AI}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AC}}$.
   De quels coefficients a, b, c faut-il affecter respectivement les points A, B, C pour que I soit leur barycentre ?
2. On suppose désormais que le triangle ABC est rectangle en A et AB = 2 et AC = 1.
   On pose $\text{S} = \left\{M / M \in \text{E}, \quad M\text{A}^2 - 2M\text{B}^2 - M\text{C}^2 = -3\right\}$.
   Démontrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Deux amis A et B organisent un jeu comprenant cinq parties. Ils décident de disputer une partie par jour, durant cinq jours.
Á chaque partie, il y a un gagnant et un perdant. Chaque jour, la probabilité que A gagne est $0,6$. Celui qui remporte le plus grand nombre de partie est déclaré vainqueur.

1. Définir un espace probabilisé fini $(\Omega_0, \mathcal{B}_0, P_0)$ associé à chacune des parties.
2. Associer au jeu un nouvel espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et introduire une variable aléatoire réelle X dont l'image est égale au nombre de parties gagnés par A au cours du jeu.
   a. Quelle est la loi de probabilité de X ?
   b. Quelle est la probabilité que A ne soit pas vainqueur à ce jeu ?

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie I

λ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda(x) = -x^2\text{e}^{-x}.$$

1. Étudier λ. On admettra que $\dfrac{\text{e}^x}{x^2}$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini.
2. Construire la courbe Γ représentative de λ dans le plan muni d'un repère orthonormé.
3. L'étude des variations de λ fait apparaître trois intervalles sur lesquels le fonction est monotone ; soient D_1, D_2 et D_3 ces intervalles avec $\forall (x_1, x_2, x_3) \in D_1 \times D_2 \times D_3$, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$.
   En notant D'_1, D'_2 et D'_3 les images par λ de D_1, D_2 et D_3, démontrer que les trois applications λ_i ($i \in \{1, 2, 3\}$)
   $\lambda_i : \begin{array}{ccc} D_i & \to & D'_i \\ x & \longmapsto & \lambda(x) \end{array}$ sont des bijections.
   Étudier les réciproques $\mu_i = \lambda_i^{-1}$.

1. Aix-Marseille - Nice - Corse - Montpellier - Toulouse

Partie II

α étant un nombre réel, on définit une application f_α de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par ?x ? R,

$$f_\alpha(x) = x^2 + \alpha \mathrm{e}^x.$$

On note $\mathscr{C}_\alpha$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. Démontrer que pour tout point M du plan, de coordonnées a et b, il passe une et seulement une, courbe $\mathscr{C}_\alpha$.

2. Démontrer que ceux des nombres $\mu_1(\alpha), \mu_2(\alpha)$ et $\mu_3(\alpha)$ qui existent pour une valeur donné de α, sont les abscisses des points communs à $\mathscr{C}_\alpha$ et à la droite définie par O et $\overrightarrow{\imath}$.

3. Soit J l'intervalle $\left[-4\mathrm{e}^{-2}\ ;\ 0\right[$.

- **a.** Montrer que $\mu_1(\alpha), \mu_2(\alpha)$ et $\mu_3(\alpha)$ existent simultanément si, et seulement si, α appartient à J.
- **b.** Étudier les variations de f_α pour une valeur quelconque de α appartenant à J.
  (Pour étudier le signe de la fonction dérivée f'_α on sera amené à étudier celui de f''_α). Dessiner une ébauche de $\mathscr{C}_\alpha$.

4. On pose :

$$\forall \alpha \in J, \quad I(\alpha) = \int_{\mu_1(\alpha)}^{\mu_3(\alpha)} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x.$$

- **a.** Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_\alpha(x) - f_\alpha(x) = 2x - x^2$.
- **b.** Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, I(\alpha) = \left[\dfrac{1}{3}\mu_3^3(\alpha) - \mu_3^2(\alpha)\right] - \left[\dfrac{1}{3}\mu_1^3(\alpha) - \mu_1^2(\alpha)\right]$.
- **c.** En déduire que $\forall x \in J, \quad I(\alpha) > \dfrac{1}{3}\mu_3^3(\alpha) - \mu_3^2(\alpha)$.
  Quel est le signe de $I(\alpha)$ si α est tel que $\mu_3(\alpha) = 3$?
- **d.** Donner une interprétation géométrique de $I(\alpha)$. Quel est le signe de $I\left(-4\mathrm{e}^{-2}\right)$?
- **e.** En utilisant cette interprétation, établir que I est une application strictement croissante.
- **f.** Combien d'éléments contient l'ensemble $\{\alpha / \alpha \in J, \quad I(\alpha) = 0\}$?