Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1980

EXERCICE 1

Soit A l'ensemble des réels x tels que $\cos x = 0$.
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lll} \forall x \in \mathbb{R} - \mathrm{A}, & f(x) & = & \mathrm{e}^{\frac{1}{\cos x}} \\ \forall x \in \mathrm{A}, & f(x) & = & 0 \end{array}\right.$$

Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
On montrera en particulier que la courbe admet au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ une demi-tangente que l'on précisera $\left(\text{on pourra poser } x = \dfrac{\pi}{2} + h\right)$.

EXERCICE 2

On considère l'application P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + (9 + 5\mathrm{i})z - 2 - 10\mathrm{i}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ a une solution imaginaire pure.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

PROBLÈME

Dans tout le problème, on note I l'intervalle $]-1\ ;\ +1[$ de $\mathbb{R}$.

Partie A

1. u étant un élément de I, on appelle φ l'application de I dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x de I, $\varphi(x) = \dfrac{x+u}{1+ux}$.
   Donner le tableau de variations de φ.
2. Pour u et v éléments de I, on note

   $$u \oplus v = \frac{u+v}{1+uv}.$$

   Démontrer que $\oplus$ est une loi interne dans I, et qu'elle confère à I une structure de groupe commutatif.
3. Pour u élément de I, on note P_u la matrice

   $$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} & \dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}} \\ \dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \end{pmatrix}$$

   Démontrer que $P_u P_v = P_{u \oplus v}$, pour $(u,\ v)$ élément de I^2.
   En déduire la structure de l'ensemble des matrices P_u où u est élément de I, muni de la multiplication des matrices.

Partie B

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Soit $M_0(y\sqrt{2}\ ;\ 0)$. Pour tout u de I, on note M_u le point de coordonnées

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}}\ ;\ \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}}$$

1. Démontrer que l'ensemble Γ des points M_u avec u élément de I est une partie d'une conique C. Représenter C. Préciser Γ.

2. **a.** On appelle $\overrightarrow{\imath'}$ et $\overrightarrow{\jmath'}$ les images respectives de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ par la rotation vectorielle d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{4}$. Démontrer que, dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath'},\ \overrightarrow{\jmath'}\right)$, Γ est la représentation graphique de la fonction numérique F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$F(x) = \frac{1}{x}.$$

b. Pour tout élément u de I, on note $\mathcal{A}(u)$ l'aire de la partie du plan limitée par le segment de droite $[0,\ M_0]$ l'arc de Γ d'extrémités M_0 et M_u et le segment de droite $[M_u,\ \text{O}]$.

On se propose d'établir que, pour tout u de I,

$$\mathcal{A}(u) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|u|}{1-|u|}\right).$$

Démontrer ce résultat pour $u \in [0\ ;\ 1[$, puis sans aucun autre calcul, pour $u \in]-1\ ;\ 0]$.

c. Démontrer que, pour u et v éléments de $[0,;\ 1[$,

$$\mathcal{A}(u \oplus v) = \mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(v).$$

3. **a.** Étudier les variations et tracer la représentation graphique de la fonction numérique $\mathcal{A}$ définie sur I par $u \longmapsto \mathcal{A}(u)$.

b. Démontrer que $\mathcal{A}$ définit une bijection de $[0\,;1[$ sur $\mathbb{R}_+$. On appelle f cette bijection. Tracer la représentation graphique de sa bijection réciproque notée f^{-1}. Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$.

c. On considère la suite (α_n), $n \in N^{\star}$, définie par

$$\alpha_1 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^{\star},\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_1.$$

Calculer, en fonction de $n, \mathcal{A}(\alpha_n)$, puis α_n, pour tout n de $\mathbb{N}^{\star}$. Étudier la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^{\star}}$.