Baccalauréat C Amiens groupe 4 [1] juin 1980

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Deux urnes contiennent dix boules indiscernables au toucher. Sur les boules de la première urne sont inscrits respectivement les nombres : 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5 et sur celles de la deuxième urne les nombres 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 5.

1. On tire une boule dans chaque urne et on définit la variable aléatoire X qui, au couple de boules tirées, fait correspondre la somme des nombres inscrits sur ces deux boules.
   - Étudier la loi de probabilité de X.
   - Calculer l'espérance mathématique de la variable X.
2. On effectue dix fois le tirage décrit à la question précédente, les boules étant remise dans leurs urnes respectives après chaque tirage.
   Quelle est la probabilité d'obtenir exactement sept fois une somme paire au cours des dix tirages ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^x - x \quad \text{si } x < 0\\ f(x) &= \cos^2 \pi x \quad \text{si } x \in [0~;~1]\\ f(x) &= 1 + \frac{\log x}{x} \quad \text{si } x > 1\end{aligned}$$

1. Étudier la continuité de la fonction f.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f.
3. Étudier les variations de la fonction f.
4. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
   On prendra 3 cm pour unité.
5. On appelle D le domaine plan, ensemble des points M de coordonnées x et y tels que :

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e}\\ 0 \leqslant y \leqslant f(x).\end{cases}$$

   Calculer en cm^2, l'aire du domaine D.

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension trois et $B = \left(\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de E.
On considère l'endomorphisme φ de E qui à tout vect $\vec{v}\,(x~;~y~;~z)$ associe le vect $\vec{v}\,'\left(x'~;~y'~;~z'\right)$ tel que :

$$\begin{aligned} 3x' &= x + (1-\sqrt{3})y + (1+\sqrt{3})z\\ 3y' &= (1+\sqrt{3})x + y + (1-\sqrt{3})z\\ 3z' &= (1-\sqrt{3})x + (1+\sqrt{3})y + z\end{aligned}$$

1.

Partie A

1. Montrer que φ est un endomorphisme orthogonal de E.

2. Etudier l'ensemble F des vects invariants par l'application φ et en déduire que φ est une rotation vectorielle.

3. Montrer que l'ensemble des vects $\overrightarrow{v}$ de E orthogonaux à $\varphi(\overrightarrow{v})$ est un plan vectoriel G. Préciser la position relative de F et G.

4. Montrer que le plan vectoriel G est globalement invariant par φ.
Quel renseignement peut-on en déduire sur l'angle de la rotation de φ ?

Partie B

On se propose, à l'aide d'un changement de base, de définir φ avec précision.
On considère, pour cela, les trois vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ de E tels que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right)\\ \overrightarrow{e_2} &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(a\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}\right)\\ \overrightarrow{e_3} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}\right)\end{aligned}$$

où $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Déterminer les réels $a,\ b$ et c pour que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ soit une base orthonormée.
Dans la suite du problème on donnera à $a,\ b$ et c les valeurs trouvées.

2. Montrer que la base orthonormée $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ est directe.

3. Exprimer les vecteurs $\varphi\left(\overrightarrow{e_1}\right)$, $\varphi\left(\overrightarrow{e_2}\right)$ et $\varphi\left(\overrightarrow{e_3}\right)$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, puis dans la base $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$.
Le plan vectoriel de base $\left(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ étant orienté par la vect $\overrightarrow{e_2}$, étudier la restriction de φ à ce plan.
Achever alors la détermination de φ.

4. On pose $\varphi^1 = \varphi$, $\varphi^n = \varphi \circ \varphi^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

a. Déterminer, avec précision, les éléments de l'ensemble

$$\Omega = \left\{\varphi^1,\ \varphi^2,\ \varphi^3,\ \varphi^4\right\}.$$

b. Soit K l'ensemble des racines quatrièmes de l'unité. Montrer que l'ensemble K muni de la multiplication des nombres complexes est un groupe commutatif.

c. On considère l'application Φ de K dans Ω définie pour tout k, élément de $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ par :

$$\Phi\left(\cos\frac{k\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{2}\right) = \varphi^k.$$

Montrer que Φ est un isomorphisme de K muni de la multiplication dans Ω muni de la loi $\circ$ de composition des applications.
En déduire la structure de l'ensemble Ω muni de la loi $\circ$ et déterminer φ^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

5. On considère les plans vectoriels P et P' engendrés respectivement par les systèmes de vecteurs $\left\{\overrightarrow{e_1}\ ,\ \overrightarrow{e_3}\right\}$ et $\left\{\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}\ ,\ \overrightarrow{e_3}\right\}$.

Soient σ et σ' les symétries vectorielles orthogonales par rapport aux plans P et P$'$ respectivement.

Déterminer les vecteurs suivants :

$$\sigma\left(\overrightarrow{e_i}\right)\ ;\ \sigma'\left(\overrightarrow{e_i}\right)\ ;\ \sigma'\circ\sigma\left(\overrightarrow{e_i}\right) \qquad \text{pour } i \in \{1,\ 2,\ 3\}.$$

En déduire que : $\sigma'\circ\sigma = \varphi$.

Partie C

1. On appelle $\mathscr{E}$ l'espace affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\ \overrightarrow{e_1}\ ,\ \overrightarrow{e_2}\ ,\ \overrightarrow{e_3}\right)$ et g l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le point $M'\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' &=& \frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}\\ y' &=& \frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}+1\\ z' &=& z+1. \end{array}\right.$$

a. Montrer que g est isométrie affine dont on déterminera, avec précision, l'endomorphisme associé γ.

b. Étudier l'ensemble des points invariants de l'application g. En déduire que g est un vissage. On montrera que g peut se mettre sous la forme :

$$g = r\circ t = t\circ r$$

où t est la translation de vect $\overrightarrow{e_3}$ et r une rotation affine que l'on déterminera.

2. Montrer que l'application $g\circ g$ est un vissage dont l'endomorphisme associé est l'application φ étudiée dans la partie A.

Préciser les éléments de ce vissage.