

∞ Baccalauréat C Amiens septembre 1980 ∞

EXERCICE 1

On considère trois entiers naturels non nuls a, b, c . Le plus grand commun diviseur de a et b est δ ; celui de b et c est δ' .

Quel est le plus grand commun diviseur de a, b, c ?

Sachant que $\delta = 12$, $\delta' = 18$ et que $a + b + c = 102$, déterminer toutes les valeurs possibles des trois nombres a, b, c .

EXERCICE 2

On considère l'équation du second degré dans \mathbb{C}

$$(m^2 + 1)z^2 + [1 - (2 + i)m]z + 1 + i = 0,$$

où m est un paramètre réel.

On note z_1 et z_2 ses racines complexes avec $|z_1| < |z_2|$.

1.
 - a. Vérifier que $\frac{1}{m+i}$ est l'une des racines. Déterminer l'autre.
 - b. Montrer qu'il existe un couple unique $(a; b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, indépendant de m tel que : $z_2 = a\bar{z}_1 + b$, \bar{z}_1 désignant le nombre complexe conjugué de z_1 .
2. Soit M_1 et M_2 les points du plan complexe d'affixes respectives z_1 et z_2 .
 - a. Dédurre de ce qui précède que M_2 est l'image de M_1 par une similitude indirecte unique dont on précisera les éléments.
 - b. Montrer que l'ensemble des points M_1 d'affixe z_1 , m décrivant \mathbb{R} , est le cercle (Γ) d'équation $x^2 + y^2 + y = 0$ privé de l'un de ses points et préciser ce point.
Déterminer, par ses coordonnées, le centre de ce cercle. En déduire l'ensemble des points M_2 d'affixe z_2 quand m varie.

PROBLÈME

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}}$$

où $\text{Log } x$ désigne le logarithme népérien de x .

1. Étudier les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
Étudier les variations de f et tracer la représentation graphique (C) de f dans un plan rapporté au repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) où $\|\vec{i}\| = 5 \text{ mm}$ et $\|\vec{j}\| = 25 \text{ mm}$.
2. Pour tout a élément de \mathbb{R}_+^* , calculer l'intégrale

$$F(a) = \int_1^a f(x) dx.$$

Déterminer $\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}} F(a)$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

Partie B

On considère dans cette partie les fonctions numériques f et g de la variable réelle x définies respectivement par

$$f(x) = \frac{\text{Log } x}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

On note \mathcal{F} l'espace vectoriel réel des applications de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} et on désigne par E le sous-espace vectoriel de \mathcal{F} engendré par la famille (f, g) .

1. Montrer que (f, g) est une base de E .
2. Pour tout u élément de E et pour tout x élément de \mathbb{R}_+^* , on définit u_1 par :
 $u_1(x) = x \cdot u'(x)$.
 Vérifier que u_1 appartient à E et montrer que l'application φ_1 de E dans E définie, pour u élément de E , par $\varphi_1(u) = u_1$ est un endomorphisme de E .
 Vérifier que, dans la base (f, g) , la matrice de φ_1 est

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Id_E désignant l'identité de E , déterminer l'unique réel λ pour lequel $\varphi_1 + \lambda \text{Id}_E$ n'est pas bijectif.
 Calculer ensuite

$$(\varphi_1 + \lambda \text{Id}_E)^2 = (\varphi_1 + \lambda \text{Id}_E) \circ (\varphi_1 + \lambda \text{Id}_E)$$

pour la valeur λ_0 de λ ainsi obtenue.

4. Pour tout u appartenant à E , on note $\varphi_1^2(u) = \varphi_1(u_1) = v_1$.
 Pour tout x appartenant à \mathbb{R}_+^* , calculer $v_1(x)$ et montrer, après développement de $(\varphi_1 + \lambda \text{Id}_E)^2$, que tout élément u de E vérifie, pour tout x élément de \mathbb{R}_+^*

$$x^2 u''(x) + 2x u'(x) + \frac{1}{4} u(x) = 0.$$

Partie C

E étant un espace vectoriel réel euclidien et (f, g) une base orthonormée de E , on définit, pour tout x appartenant à \mathbb{R} , les applications u_2 et u_3 par

$$u_2(x) = \frac{1}{x} u\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad u_3(x) = \frac{\text{Log } x}{2} (u(x) + u_2(x))$$

1. Vérifier que u_2 et u_3 sont des éléments de E et que les applications φ_2 et φ_3 de E dans E , définies, pour tout u élément de E , par

$$\varphi_2(u) = \frac{1}{x} u\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \varphi_3(u) = \frac{\text{Log } x}{2} (u(x) + u_2(x))$$

sont des endomorphismes de E .

Donner les matrices M_2 et M_3 respectives de φ_2 et φ_3 dans la base $(f; g)$.

2. Quelle est la nature géométrique de φ_2 ?
3. Soit $\Phi = a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3$ avec $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$?
 - a. Pour quelles valeurs de $(a; b; c)$, Φ est-elle une rotation vectorielle ?
 Dans chacun des cas obtenus, indiquer la matrice de Φ et les éléments caractéristiques de la rotation Φ .

- b.** Pour quelles valeurs de $(a ; b ; c)$, Φ est-elle une symétrie vectorielle ?
Parmi celles-ci existe-t-il des symétries vectorielles orthogonales ? Éventuellement les préciser.
- c.** En rappelant qu'un projecteur p est caractérisé par $p^2 = p$, pour quelles valeurs de $(a ; b ; c)$, Φ est-elle une projection ?

N.B. - Pour les questions b. et c. ci-dessus, on ne précisera pas les éléments caractéristiques des endomorphismes Φ .