Baccalauréat C Antilles–Guyane juin 1980

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Démontrer que le carré de tout nombre entier impair est congru à 1 modulo 8.
2. Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation $y^2 = 8x + 1$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = 2^{x+2}\left(2^x - 1\right).$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f.
2. Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
3. Soit λ un réel strictement négatif. Calculer

$$\mathscr{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{0} f(x)\,\text{d}x.$$

$\mathscr{A}(\lambda)$ a-t-elle une limite lorsque λ tend vers $-\infty$? Si oui, déterminer cette limite.

PROBLÈME **13 POINTS**

Soit E un espace affine euclidien orienté et soit $R = \left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé, direct de E. On considère le plan Π de E d'équation $z = 0$ dans R.

Partie A

u, v, h étant des réels tels que $(u,\ v) \neq (0,\ 0)$, on considère la droite Δ de Π d'équation $ux + vy + h = 0$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées $\left(x',\ y',\ z'\right)$ du point M', image de M dans la projection orthogonale sur la droite Δ, en fonction des coordonnées $(x,\ y,\ z)$ de M.
2. On appelle distance du point M à la droite Δ et l'on note $d(M,\ \Delta)$ la norme du vecteur $\overrightarrow{MM'}$. Montrer que

$$d(M,\ \Delta) = \sqrt{\frac{(ux + vy + h)^2}{u^2 + v^2} + z^2}.$$

Partie B

On considère les points A et B de E de coordonnées : A$(0 ; 1 ; \alpha)$ B$(0 ; -1 ; \beta)$ où α et β sont deux réels. On désignera par F l'ensemble des droites du plan Π équidistantes des points A et B.

1. Une droite de Π de vecteur directeur $\vec{\jmath}$ peut-elle appartenir à F ? Préciser alors F.

2. On suppose dans la suite du problème que $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$ et l'on pose $p = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{2}$.
Montrer qu'une droite de Π appartient à F si, et seulement si, elle admet une équation dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de la forme

$$y = ax + \frac{p}{2}\left(a^2 + 1\right)$$

où a est un réel.

3. Soit N_0 un point de P de coordonnées $\left(x_0 ;\ y_0 ;\ 0\right)$, déterminer le nombre de droites de F qui contiennent N_0. Discuter. On appelle P l'ensemble des points de Π qui appartiennent à une seule droite de F. Trouver une équation de l'ensemble P.

4. Soit P la courbe d'équation

$$y = -\frac{1}{2p}x^2 + \frac{p}{2}.$$

dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Quelle est la nature de P ? Donner une équation cartésienne de la tangente à P au point de P d'abscisse t.
Montrer que F est l'ensemble des tangentes à la courbe P. Construire P dans le cas où $\alpha = 2$ et $\beta = 0$.

Partie C

On rappelle qu'à tout vissage f correspond une droite D, un angle ω et un vecteur $\vec{v}$ appelés respectivement : axe, angle et vecteur du vissage, tels que $f = r \circ t = t \circ r$ où r est la rotation d'axe D et d'angle ω, t la translation de vecteur $\vec{v}$ où $\vec{v}$ est un vecteur directeur de D s'il n'est pas nul, et $\circ$ le symbole de la composition des applications.
On considère l'ensemble $\mathcal{V}$ des vissages de E dont l'axe est dans Π et qui transforment A en B.

1. Soit A$'$ et B$'$ les images de A et B dans la projection orthogonale sur une droite du plan π. Montrer que cette droite est axe d'un vissage de $\mathcal{V}$ si, et seulement si, elle appartient à F. On précisera le vecteur et l'angle de ce vissage en fonction de A, B, A$'$, B$'$. Quel est l'ensemble des axes des éléments de $\mathcal{V}$?

2. On suppose, comme dans la question B 4. que $\alpha = 2$ et $\beta = 0$. Préciser l'ensemble des axes des éléments de $\mathcal{V}$. Préciser la nature du vissage de $\mathcal{V}$ et le Cosinus de son angle lorsque l'axe est la droite de Il d'équation y = 1 dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

3. Donner le vecteur et le cosinus de l'angle du vissage de $\mathcal{V}$ dont l'axe est la droite de Π d'équation $y = -x + 2$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.