Baccalauréat C Besançon septembre 1980

EXERCICE 1

n désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2.

1. Soit f l'application définie par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(s) = (1+s)^n.$$

Exprimer $f(s)$ en utilisant le développement du binôme de Newton. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k$$

2. α désignant un réel fixé, on pose, pour tout entier k appartenant à $\{O, 1, 2, \cdots, n\}$, $p_k = \alpha \mathrm{C}_n^k$.
Déterminer α pour que les p_k définissent une loi de probabilité de la variable aléatoire X dont les valeurs sont 0, 1, 2, $\cdots$, n telle que, pour tout k, $\quad p(\mathrm{X} = k) = p_k$. Cette valeur sera prise dans la suite de l'exercice. .
3. On considère l'application

$$g \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(s) = \sum_{k=0}^{n} p_k s^k.$$

Comparer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X et le nombre dérivé de la fonction g au point 1.
Trouver pour tout s réel une expression simple de $g(s)$, puis de $g'(s)$. En déduire la valeur numérique de E(X).

EXERCICE 2

P est un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Un point M est mobile dans P et sa position à l'instant t est donnée par ses coordonnées

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \mathrm{e}^t \\ y & = & (1+t)\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right. \qquad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

On prendra pour e la valeur approchée 2,7.

1. Soit C la trajectoire de M ; former l'équation de C sous la forme $y = f(x)$, et construire C (l'unité sera représentée par 5 cm).
2. Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ de M à l'instant t. Montrer que, de $t_1 = 0$ à $t_2 = 1$ le mouvement est accéléré.
À quel instant, $V(t)$ et $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ sont-ils colinéaires ? Quelle est alors la position de M ?

PROBLÈME

E désigne un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{k}\right)$.
$\mathscr{L}$ désigne l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

Partie A

Soit P le plan vectoriel qui a pour équation $x+2y+3z=0$.

1. p désignant la projection vectorielle orthogonale de E sur P, écrire en fonction des coordonnées $(x,\ y,\ z)$ d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ les coordonnées $\left(x',\ y',\ z'\right)$ du vecteur $\overrightarrow{V'}=p\left(\overrightarrow{V}\right)$.
2. On considère l'application q de E dans E définie par

$$\overrightarrow{V}=x\overrightarrow{\imath}+y\overrightarrow{\jmath}+z\overrightarrow{k},\quad \overrightarrow{V_1}=q\left(\overrightarrow{V}\right)=x_1\overrightarrow{\imath}+y_1\overrightarrow{\jmath}+z_1\overrightarrow{k}.$$

avec

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \dfrac{1}{14}(x+2y+3z),\\ y_1 & = & \dfrac{1}{7}(x+2y+3z)\\ z_1 & = & \dfrac{3}{14}(x+2y+3z),\end{array}\right.$$

Montrer que q est une projection vectorielle que l'on définira par son image et son noyau.
3. Identifier les endomorphismes $p+q,\ p\circ q,\ q\circ p$.

Partie B

On considère l'ensemble A des endomorphismes $ap+bq$ où $(a,\ b)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}$; quelle en est la dimension ?
2. Déterminer noyau et image de $ap+bq$, selon les valeurs de a et b.
3. Montrer que les homothéties vectorielles appartiennent à A.
4. Montrer que la composée de deux éléments de A est un élément de A ; en déduire que $(A,+,\circ)$ est un anneau commutatif unitaire.
5. Montrer que A contient quatre projections vectorielles seulement.
6. Quels sont les éléments involutifs de A ?

N.B. - La partie B peut se traiter sans utiliser les expressions analytiques de p et de q.