Baccalauréat C Bordeaux septembre 1980

EXERCICE 1

1. Décomposer le nombre entier 469 en produit de facteurs premiers.
2. Trouver tous les couples $(x~;~y)$ d'entiers positifs tels que $x^3 - y^3 = 469$.

EXERCICE 2

Le plan complexe (P) étant rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on considère :

le point M d'affixe $z = x + \text{i}y$; x et y réels ;

le point M' d'affixe $z' = x + 4\text{i}y$;

le point A d'affixe -7 ;

le point B d'affixe 5.

Quelles conditions doit vérifier z pour que l'on ait $M \neq \text{A}$ et $M' \neq \text{B}$?
Ces conditions étant remplies, on appelle (D) la droite contenant les points A et M et (D$'$) la droite contenant les points B et M'.

1. Montrer que (D) est parallèle à (D$'$) si, et seulement si, $\dfrac{z+7}{z'-5} \in \mathbb{R}^\star$.
   En déduire l'ensemble (C_1) des points M tels que les droites (D) et (D$'$) soient parallèles. Construire (C_1).
2. Déterminer, de la même manière, l'ensemble (C_2) des points M tels que les droites (D) et (D$'$) soient perpendiculaires. Construire (C_2).

PROBLÈME

Partie A

1. **a.** Étudier les variations sur l'intervalle $\left[0~;~\dfrac{\pi}{4}\right]$ de la fonction $f~:~x \longmapsto \text{tg}^3 x$.
   b. Démontrer que cette fonction admet une fonction réciproque g, définie sur un intervalle J à préciser. Montrer que la fonction g est dérivable en tout point $y \in \text{J}$, $y \neq 0$, et calculer $g'(y)$ en fonction de y. (Ce calcul n'est pas nécessaire pour traiter la suite du problème.)
   c. Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions f et g (dans un plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormé). Préciser les demi-tangentes aux courbes aux extrémités des intervalles de définition.
2. **a.** Montrer que la fonction $x \longmapsto \text{Log}\cos x$ est définie sur $\left[0~;~\dfrac{\pi}{4}\right]$, et est dérivable sur cet intervalle. Calculer sa dérivée.
   b. Quelle est la dérivée de la fonction $x \longmapsto \text{tg}^2 x$ sur $\left[0~;~\dfrac{\pi}{4}\right]$?
   c. Calculer l'aire de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x~;~y)$ sont telles que

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

d. En déduire la valeur de $\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y$. (On pourra utiliser un argument géométrique ; il n'est pas demandé de trouver une primitive de la fonction g.)

Partie B

1. a. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$ par

$$\forall x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right] \quad \varphi(x) = \frac{4}{\pi}x - \operatorname{tg} x.$$

Montrer que la fonction φ est dérivable sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$ et qu'il existe un unique réel et $\alpha \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$ tel que $\varphi'(\alpha) = 0$.

Étudier le sens des variations de φ sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$ et en déduire l'inégalité

$$\forall x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right] \quad \operatorname{tg} x \leqslant \frac{4}{\pi}x.$$

b. Pour n entier supérieur ou égal à 1, posons $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x\,\mathrm{d}x$. Montrer que $I_n \leqslant \dfrac{\pi}{4(n+1)}$ pour tout n. Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$?

2. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie au B 1. b.

a. Calculer I_1, I_2.

b. Soit U une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction V, définie sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$ par $V(x) = U(\operatorname{tg} x)$ est dérivable, et exprimer sa dérivée à l'aide de celle de U.

c. Pour n entier supérieur ou égal à 3, calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{tg}^{n-2} x + \operatorname{tg}^n x\right)\mathrm{d}x.$$

En déduire que $I_n = -I_{n-2} + \dfrac{1}{n-1}$ pour tout $n \geqslant 3$.

d. Soit $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ la suite de nombres réels définie pour k entier, $k \geqslant 1$, par

$$v_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$$

$\left(\text{donc } v_1 = 1 - \dfrac{1}{2},\ v_2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}, \text{ etc}\right)$.

Déduire de B 2. c., que pour tout entier $n \geqslant 5$, on a

$$I_n = I_{n-4} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3}$$

et en conclure que pour tout entier $k \geqslant 1$

$$I_{4k+1} = I_1 - \frac{1}{2}v_k.$$

Montrer que la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ tend vers une limite que l'on déterminera.