Baccalauréat C Caen juin 1980

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (\log|x|)^2 + \log|x| + 1.$$

a. Trouver la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers plus l'infini (on pourra étudier d'abord la limite éventuelle de $\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers plus l'infini).

b. Étudier f et tracer sa courbe représentative dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

2. Soit $\epsilon \in]0\ ;\ 1[$. On appelle $\mathscr{A}(\epsilon)$ l'aire de l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient

$$\left\{\begin{array}{ccccc}\epsilon & \leqslant & x & \leqslant & 1\\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x).\end{array}\right.$$

Calculer $\mathscr{A}(\epsilon)$. Montrer que $\mathscr{A}(\epsilon)$ a une limite finie quand ϵ tend vers 0.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$5x - 11y = 4.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$, le système :

$$\left\{\begin{array}{cccc}3z & \equiv & 1 & [5]\\ 7z & \equiv & 9 & [11].\end{array}\right.$$

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit $\mathscr{P}$ un espace vectoriel euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe $B = \left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. On munira $\mathscr{L}(\mathscr{P})$, ensemble des endomorphismes de $\mathscr{P}$, de sa structure usuelle d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Si $M = \begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}$, on notera dans tout le problème $t(M)$ le réel $\alpha + \delta$.

On appellera E l'ensemble des endomorphismes de $\mathscr{P}$ dont la matrice dans la base B est de la forme $\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels quelconques.

Partie A

1. Soit f_1, f_2, f_3 les endomorphismes de $\mathscr{P}$ de matrices respectives dans la base B ;

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathscr{P})$ de base $\left(f_1, f_2, f_3\right)$. Est-il stable pour la composition des applications ?

2. Soit $T : f \longmapsto t(M)$ de E dans $\mathbb{R}$ où M est la matrice de f relativement à B.
   Démontrer que le noyau de T est un plan vectoriel F de E.
3. Soit $\varphi : (f,\ g) \longmapsto t(MN)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, M et N étant les matrices respectives de f et g dans B.
   Démontrer que φ est un produit scalaire.
   Dans la suite du problème, E sera muni de la structure euclidienne définie par φ.
4. Déterminer une base orthonormée $B' = \left(g_1,\ g_2,\ g_3\right)$ de E telle que $\left(g_1,\ g_2\right)$ soit une base de F.

Partie B

Soit λ un réel. On appelle θ_λ l'endomorphisme de E dont l'expression analytique dans la base B' est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \frac{1}{3}[\lambda x - 2y + (\lambda+1)z] \\ y' & = & \frac{1}{3}[(\lambda+1)x - \lambda y - 2z] \\ z' & = & \frac{1}{3}[2x + (\lambda+1)y + \lambda z] \end{array}\right.$$

1. Démontrer que pour tout λ réel, θ_λ est bijectif. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles θ_λ est une isométrie vectorielle de E.
2. Démontrer que si $\lambda = -2$, θ_λ est une rotation vectorielle.
   Donner son axe et un couple de vecteurs représentant son angle. (On pourra supposer $(E,\ \varphi)$ orienté par la base B').

Partie C

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul de $\mathcal{P}$, on appelle $s_{\overrightarrow{u}}$ la symétrie vectorielle orthogonale de $\mathcal{P}$ par rapport à la droite de base $\overrightarrow{u}$. I désigne l'application identique de $(\mathcal{P})$.

1. Montrer que $s_{\overrightarrow{u}} \in E$ et calculer $\varphi\left(s_{\overrightarrow{u}},\ \mathrm{I}\right)$.
2. Soit $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ un couple de vecteurs non nuls de $\mathcal{P}$, on désigne par α l'angle du couple de vecteurs $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$; exprimer $\varphi\left(s_{\overrightarrow{u}},\ s_{\overrightarrow{v}}\right)$ en fonction de $\cos\alpha$.
3. $\overrightarrow{u}$ étant un vecteur non nul fixé, déterminer les vecteurs $\overrightarrow{v}$ tels que $\varphi\left(s_{\overrightarrow{u}},\ s_{\overrightarrow{v}}\right) = 0$ et le nombre de symétries $s_{\overrightarrow{v}}$ correspondantes.
4. Déterminer une base de l'orthogonal, dans E, de la droite de base $s_{\overrightarrow{u}}$.