∽ Baccalauréat C Caen septembre 1980 ∾

EXERCICE 1

Calculer l'intégrale définie $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin^5 x\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 1

1. Dans le corps des complexes calculer

$$(2+\mathrm{i})^3 \quad \text{et} \quad (1-\mathrm{i})^3.$$

2. Résoudre l'équation

$$z \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad z^6 - 9\mathrm{i}z^3 + 18 - 26\mathrm{i} = 0.$$

On en exprimera les racines sous forme algébrique.

PROBLÈME

Partie A

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;

$$x \longmapsto \frac{x + \sqrt{5x^2 - 4}}{2}$$

et soit un plan affine euclidien $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Faire une étude précise de f et tracer sa courbe représentative C dans le plan $\mathscr{P}$.
2. D étant la droite d'équation $y = -x$, déterminer l'expression analytique de la symétrie affine s par rapport à la droite D selon la direction du vecteur $\vec{\jmath}$.
3. Déterminer une équation de la courbe C′ image de C par s. En déduire que C ∪ C′ est la courbe d'équation

$$x^2 + xy - y^2 = 1,$$

dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On l'appellera H et on la tracera dans le plan $\mathscr{P}$.

4. Écrire une équation de H dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$où $\vec{I}$ désigne le vecteur $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$. En déduire que H est invariante dans deux symétries (en plus de s) dont on précisera les éléments.

Partie B

On désigne par A la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ et on considère la suite réelle $\left(u_p\right)$ définie par

$$u_0 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{p+2} = u_{p+1} + u_p \text{ pour } p \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer A^2 et A^3. Démontrer par récurrence sur p que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$ on a

$$A^P = \begin{pmatrix} u_{2p-2} & u_{2p-1} \\ u_{2p-1} & u_{2p} \end{pmatrix}$$

2. Démontrer qu'il existe un réel $a > 0$, et un seul, tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait

$$2au_p = \left(\frac{1}{2} + a\right)^{p+1} - \left(\frac{1}{2} - a\right)^{p+1}.$$

En déduire une expression de u_p en fonction de p.

Partie C

On considère l'application affine T de $\mathscr{P}$ dont l'endomorphisme associé a pour matrice A dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ et qui est telle que T(O)= O.

1. Montrer que T(H) = H.
2. On désigne par E le sous-ensemble de H constitué des points à coordonnées entières $[(x,\ y) \in \mathbb{Z}^2]$ dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Montrer que $T(\text{E}) \subset \text{E}$ et $s(\text{E}) \subset \text{E}$.
3. Soit la suite de points (M_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_{n+1} = T\left(M_n\right)$, M_0 étant le point de coordonnées (1 ; 0).
   On désigne par x_n et y_n l'abscisse et l'ordonnée de M_n. En utilisant la partie B exprimer x_n et y_n en fonction des termes de la suite (u_n), puis en fonction de n.
4. Étudier le comportement de la suite (x_n) lorsque n tend vers plus l'infini. En déduire que E est infini.