Baccalauréat C Clermont–Ferrand juin 1980

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Le plan affine euclidien P est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Les points A, B, C, A′, B′ et C′ de ce plan ont respectivement pour coordonnées dans ce repère

$$A(3~;~1),\ B(3~;~-1),\ C(2~;~1),\ A'(2~;~5),\ B'(4~;~3),\ C'(1~;~4).$$

1. Prouver rapidement, en utilisant les résultats du cours, qu'il existe une application affine unique g, de P dans P, telle que les images par g des points A, B et C soient respectivement les points A′, B′ et C′. Trouver, en fonction des coordonnées $(x~;~y)$ d'un point M de P, les coordonnées du point $g(M)$, image de M par g. Déterminer le point invariant I de g. Quelle est la nature géométrique de g ?
2. Déterminer le barycentre des points I, A, B affectés respectivement des coefficients 6, 1, 1. En déduire le barycentre des points I, A′, B′ affectés des mêmes coefficients respectifs.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On désigne par f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que, si $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, $\mathrm{i}^2 = -1$,

$$\forall z \in \mathbb{C}), \quad f(z) = z^2 - (5+3\mathrm{i})z + 10 + 5\mathrm{i}.$$

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$.
2. On désigne par P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. À tout point M de ce plan, dont les coordonnées sont $(x~;~y)$ dans le repère précédent, on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ affixe de M.
   Déterminer l'ensemble F des points M du plan P dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit imaginaire pur.
   Déterminer avec précision les éléments géométriques de F.

PROBLÈME **13 POINTS**

Dans tout ce problème, on désigne par P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, l'unité de longueur étant égale à 4 centimètres.

1. Étudier les variations des fonctions f et g, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que

   $$f(x) = x2^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^{-1}2^{x}.$$

   Pour étudier les limites des fonctions f et g, on posera $v = x\log 2$.
2. On rappelle que $\log 2 \approx 0,69$. Tracer dans P les courbes F et G représentatives des fonctions f et g respectivement.
3. Trouver une primitive de f à l'aide d'une intégration par parties.
   En déduire l'aire A(u) de la partie du plan P limitée par la courbe F, par l'axe des x et par les droites qui ont pour équations respectives, dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, $x = 0$ et $x = u \quad u \in \mathbb{R}_+$.
   (On prend comme unité d'aire l'aire d'un carré dont les côtés ont pour longueur l'unité de longueur).

4. Trouver une équation de la tangente à la courbe F au point A de cette courbe qui a pour abscisse $x = \dfrac{2}{\log 2}$.
Calculer la différence entre l'ordonnée y d'un point S de F et l'ordonnée y_T du point T de la tangente en A à F qui a la même abscisse x que S. Étudier les variations de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$h : x \longmapsto y - y_T.$$

En déduire que F traverse sa tangente en A.

5. Un mobile M parcourt la courbe F du plan P de manière que l'abscisse de M soit égale au temps t : $x = t$.
Déterminer, dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ de M à l'instant t et celles du vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma}$ de M à l'instant t.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\Gamma}$.
Pour quelles valeurs de t ce produit est-il nul ?

6. Quels sont les ensembles J, K, L, W, formés par les entiers relatifs n tels que, respectivement,

a. $f(n)$ soit un élément de $\mathbb{Z}$;

b. $f(n)$ soit le carré d'un entier naturel ;

c. $g(n)$ soit un élément de $\mathbb{Z}$;

d. $g(n)$ soit le carré d'un entier naturel ?