Baccalauréat C Clermont-Ferrand juin 1981

EXERCICE 1 **3 POINTS**

n désigne un entier naturel.

1. Étudier suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de 7^n par 9.
2. Démontrer que, quel que soit n, $7^n + 12n - 1$ est divisible par 9.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Le symbole ln désigne le logarithme népérien. (Les candidats peuvent toutefois, s'ils le désirent le remplacer par log).
Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \ln \frac{e^{2x} + 5}{e^x - 2}$$

sur l'ensemble E des points de $\mathbb{R}$ pour lesquels cette expression a un sens.
$(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de la fonction f, construite relativement à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. a. Quel est l'ensemble E de définition de la fonction f ?
   b. Étudier le sens des variations de f, ainsi que ses limites éventuelles aux bornes de l'ensemble E.
   c. On pose pour tout x appartenant à E :

   $$\varphi(x) = f(x) - x.$$

   Étudier la limite éventuelle de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que le signe de $\varphi(x)$. Que peut-on en conclure pour $(\mathscr{C})$?
   d. Tracer $(\mathscr{C})$.
2. Soit A l'image de $]\ln 2 ; \ln 5[$ par f et F l'application de $]\ln 2 ; \ln 5[$ sur A, définie pour tout x appartenant à $]\ln 2 ; \ln 5[$ par $F(x) = f(x)$.
   Montrer que E admet une application réciproque G dont on précisera les propriétés : sens des variations, continuité, dérivabilité.
   Tracer sur la même figure que $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de G.

PROBLÈME **12 POINTS**

Tout au long du problème les résultats qui seront obtenus par des raisonnements évitant des calculs superflus seront spécialement appréciés par le correcteur.

Le plan affine euclidien orienté E est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
(On rappelle que, dans E, chaque angle α de vecteurs est associé à un nombre réel unique t de l'intervalle $]-\pi ; +\pi]$ qui est appelé sa détermination principale, ou sa mesure principale, qui vérifie $\cos\alpha = \cos t$, $\sin\alpha = \sin t$, et qui permet de le caractériser. On rappelle également que chaque angle α' de droites est associé à un nombre réel unique de l'intervalle $]-\pi ; +\pi]$ qui est encore appelé sa détermination principale ou sa mesure principale, et qui est la détermination principale de l'un des deux angles de vecteurs qui représentent α').
Dans tout le problème

a est un nombre réel strictement positif, A est le point de E de coordonnées $(a\ ;\ 0)$,

D est la droite d'équation $x = a$,

f est une fonction réelle strictement positive de la variable réelle t, définie sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ +\pi]$.

Les affixes sont prises relativement au repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Pour chaque valeur du paramètre t, on note s_t, l'application de E dans E qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point $M_t = s_t(M)$ d'affixe z_t, telle que

$$z_t = f(t)(\cos t + \mathrm{i}\sin t)z.$$

Partie A

Quelle est la nature de l'application s_t ?
Quels sont les éléments géométriques qui la caractérisent ?
Donner les équations qui la définissent analytiquement par rapport au repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Donner également les équations qui définissent analytiquement s_t^{-1}.

Partie B

Dans toute cette partie, la fonction f est définie pour tout t appartenant à $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(t) = \dfrac{1}{\cos t}$.

1. Montrer que si M est distinct de O, alors, pour tout t appartenant à $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ le triangle $\text{O}MM_t$ est rectangle en M. Quel est l'ensemble $J(M)$ décrit par le point M_t, lorsque t décrit l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, le point M restant fixe ?
2. Montrer que l'image de D par s_t, est une droite D_t, dont on donnera une équation cartésienne dépendant seulement des paramètres a et $\tan t$.
   Montrer que la parabole P de foyer O, dont la tangente au sommet est D, a pour équation

   $$y^2 = 4a(a - x).$$

   Montrer que pour tout t appartenant à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, l'intersection de D_t et de P est formée par un point unique K, et que D_t est tangente à P en ce point.
   Montrer que lorsque t décrit l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, décrit toute la parabole P.
3. On note C un cercle de centre A, dont le rayon R est strictement positif et différent de a. On désigne par Γ la conique définie relativement au repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ par l'équation

   $$\frac{(x-a)^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 - a^2} = 1.$$

   Indiquer suivant les valeurs de R, la nature de la conique Γ. Déterminer son centre et ses foyers.
   Déterminer le centre et le rayon du cercle C_t, image de C par s_t.
   Montrer que C_t est défini par l'équation :

   $$(x-a)^2 + (y - a\tan t)^2 = R^2\left(1 + \tan^2 t\right).$$

   Montrer que lorsque C_t et Γ se coupent, leur intersection est formée de deux points N_t et N'_t symétriques par rapport à D et on calculera l'ordonnée.

Partie C

Dans toute cette partie, la fonction f est définie pour tout t appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}~;~\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(t) = \cos t$.
On pose toujours $M_t = s_t(M)$.

1. Montrer que lorsque M est distinct de O, le triangle OMM_t est rectangle en M_t.

Quel est l'ensemble décrit par M_t, lorsque t décrit l'intervalle le point M restant fixe ?

2. On prend $t \neq 0$, on pose $A_t = s_t(A)$. Donner la détermination principale de l'angle de droites défini par le couple (AM), $(A_t,~M_t))$.

Soit H_t le point d'intersection des droites (AM) et $(A_t,~M_t)$.

Montrer que les points 0, H_t, A, A_t sont cocycliques.

Montrer que les points 0, H_t M, M_t sont cocycliques.

Quelle est la projection orthogonale de O sur la droite (AM) ?

3. Soit D$_t$, l'image de D par s_t. Montrer que lorsque t varie , D$_t$ passe par un point fixe.