Baccalauréat C Dijon juin 1980

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Soit f la fonction numérique de la variable réelle$x$, définie par

$$f(x) = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

où log désigne la fonction logarithme népérien.

Déterminer l'ensemble de définition de f, ainsi que la fonction dérivée première f'.

2. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur exacte du réel

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 t\cdot\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

EXERCICE 2 **3 POINTS**

E désigne un espace affine associé à un espace vectoriel V de dimension 3, rapporté au repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Soit f l'application affine de E dans E qui, à tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le point M' dont les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ sont :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x' &=& -x+z\\ y' &=& -2x+y+z+2\\ z' &=& z+4.\end{array}\right.$$

1. Démontrer que l'endomorphisme φ associé à f est involutif; le déterminer.
2. Quel est l ?ensemble des points invariants par f ?
3. Soit g la symétrie affine d'endomorphisme associe φ qui laisse invariant le point A de coordonnées(0 ; 1 ; 2). Soit t la translation de vecteur $2\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+4\vec{k}$.

   Vérifier que $f = t\circ g = g\circ t$.

PROBLÈME **13 POINTS**

Dans tout le problème, $(a,\ b)$ est un couple donné, élément de $\mathbb{R}^2 - \{(0,\ 0)\}$. On désigne par :

$\mathscr{P}$ un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

$\mathscr{P}^\star$ l'ensemble P privé de l'origine O.

$\mathbb{C}^\star$ l'ensemble des nombres complexes privé de zéro (on pourra utiliser les notations ρ et θ pour désigner respectivement le module et un argument d'un élément de $\mathbb{C}^\star$.

A le point de $\mathscr{P}^\star$ d'affixe 1.

Pour tout couple de points $\left(M,\ M'\right)$ de $\mathscr{P}^\star$, d'affixe respective z et z', on associe le point d'affixe zz', noté $M\Delta M'$.

On définit ainsi une loi de composition interne dans $\mathscr{P}^\star$.

Partie A

1. Soient Q et Q′ les points de $\mathscr{P}^\star$ d'affixe respective
$$z = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad z' = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$
Représenter les points Q, Q′ et Q Δ Q′.
2. Démontrer que $(\mathscr{P}^\star,\ \Delta)$ est un groupe commutatif isomorphe à $\left(\mathbb{C}^\star,\ \times\right)$. Quel est son élément neutre ?
3. On appelle $f_{a,\ b}$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{P}^\star$ qui, à tout réel t, associe le point M d'affixe $\mathrm{e}^{at}(\cos bt + \mathrm{i}\sin bt)$.
Démontrer que $f_{a,\ b}$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},\ +)$ dans $(\mathscr{P}^\star,\ \Delta)$.
Le point Q′ a-t-il des antécédents par $f_{0,\ b}$? Lorsque a est non nul, Q a-t-il des antécédents par $f_{a,\ b}$?
En déduire que l'application $f_{a,\ b}$ n'est pas surjective.
Pour quelles valeurs de a l'application $f_{a,\ b}$ est-elle surjective ?
4. On appelle $\mathbb{C}_{a,\ b}$ l'image de $\mathbb{R}$ par $f_{a,\ b}$.
Reconnaître les ensembles $\mathbb{C}_{0,\ b}$ et $\mathbb{C}_{a,\ 0}$.
Démontrer que $\left(\mathbb{C}_{a,\ b},\ \Delta\right)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{P}^\star,\ \Delta)$.

Partie B

Dans cette partie seulement, a est un réel strictement positif, b un réel quelconque.
Soit $\left(u_q\right)_{q\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 0$, de raison r, réel strictement négatif.
Pour tout entier naturel q, on désigne par M_q le point $f_{a,\ b}\left(u_q\right)$, dont l'affixe est notée z_q.

1. On donne, dans cette questions seulement, $a = 1, b = 1, r = -\dfrac{\pi}{4}$. Représenter les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 et construire les segments $\left[M_q, M_{q+1}\right]$, $q \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.
On prendra 10 cm pour unité de longueur.
2. Vérifier que $z_q = z_1^q$ et que $\left|z_{q+1} - z_q\right| = \mathrm{e}^{aqr}\,|z_1 - 1|$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \displaystyle\sum_{q=0}^{n-1}\left\|\overrightarrow{M_qM_{q+1}}\right\|$ converge vers
$$L(r) = \sqrt{1 + 2\frac{(1-\cos br)}{(1-\mathrm{e}^{ar})^2}\mathrm{e}^{ar}}.$$
Quelle est la limite L de $L(r)$ lorsque r tend vers 0 ?

Partie C

Dans cette partie, on cherche l'ensemble $\mathscr{S}_{a,\ b}$ des similitudes directes S de centre O qui laissent $\mathbb{C}_{a,\ b}$ globalement invariant, c'est-à-dire telles que $S(\mathbb{C}_{a,\ b}) = \mathbb{C}_{a,\ b}$.
Étant donné un élément S de $\mathscr{S}_{a,\ b}$, on note k son rapport, φ une détermination de la mesure de son angle, en radian.

1. Soit M un point quelconque de P, démontrer que $S(M) = S(\mathrm{A})\Delta M$.
2. Soit M un élément de $\mathbb{C}_{a,\ b}$. On considère les trois propositions :

   P_1 : $S(M)$ appartient à $\mathbb{C}_{a,\ b}$

   P_2 : $S(\mathrm{A})$ appartient à $\mathbb{C}_{a,\ b}$

P_3 : il existe une réel T et un élément λ de $\mathbb{Z}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{e}^{aT} & = & k \\ bT & = & \varphi + 2\lambda\pi. \end{array}\right.$$

Démontrer l'équivalence des propositions P_1 et P_2, puis des propositions P_2 et P_3.

3. En déduire que $\mathcal{S}_{a,\ b}$ est égal à l'ensemble $\mathcal{S}'_{a,\ b}$ des similitudes de centre O, de rapport e^{aT}, dont une détermination de la mesure de l'angle est bT, lorsque T décrit $\mathbb{R}$.