Baccalauréat C Dijon septembre 1980

EXERCICE 1

Dans un espace vectoriel euclidien E, de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère l'application linéaire φ de E dans E définie par

$$\varphi\left(\vec{\imath}\right) = \vec{\jmath}, \quad \varphi\left(\vec{\jmath}\right) = \vec{k}, \quad \varphi\left(\vec{k}\right) = -\vec{\imath}.$$

1. Démontrer que φ est une transformation orthogonale.
   Quel est l'ensemble de ses vecteurs invariants ?
2. Démontrer que $\varphi \circ \varphi$ est une rotation vectorielle dont on déterminera l'axe D.
3. On désigne par P le plan vectoriel orthogonal à D. Définir analytiquement la symétrie vectorielle orthogonale σ par rapport à P.
4. Démontrer l'existence d'une rotation vectorielle r d'axe D telle que $\varphi = \sigma \circ r$.
   Les applications σ et r commutent-elles ?

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel non nul, q un réel distinct de 0, de 1 et de -1. On considère, dans le plan complexe, n points $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$ d'affixes respectives $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}$.

1. Démontrer que le système de points pondérés

$$\left\{\left(A_k, q^k\right) 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$$

   admet un barycentre G_n.
2. On donne

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_0 & = & 1; \\ z_1 & = & \cos\dfrac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}; \\ z_k & = & (z_1)^k \quad \forall k \in \{1, 2, \cdots, n-1\} \end{array}\right.$$

   a. Déterminer l'affixe z_n de G_n à l'aide de q et z_1.

   b. Calculer la partie réelle X_n et la partie imaginaire Y_n de Z_n.
   $\left(\text{On rappelle que } X_n = \dfrac{Z_n + \overline{Z_n}}{2},\ Y_n = \dfrac{Z_n - \overline{Z_n}}{2}.\right)$
3. **a.** Comment faut-il choisir n pour que Z_n soit réel ?

   b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n$.

PROBLÈME

On désigne par E(x) (partie entière du réel x), l'entier relatif k tel que $k \leqslant x < k+1$ et par Log x le logarithme népérien de x.
Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f :\longmapsto \left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & \mathrm{E}(x)\mathrm{Log}\, x \quad \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & = & 0. \end{array}\right.$$

Partie A

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. Démontrer que f est une fonction croissante sur cet ensemble (on ne cherchera pas à la dériver). Sur quel sous-ensemble est-elle strictement croissante ?
2. Démontrer que pour x supérieur ou égal à 1, $f(x)$ est supérieur ou égal à Log x. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.
4. Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

   a. Étant donné k entier naturel non nul, on désigne par C_k la représentation graphique de la fonction

   $$g_k : x \longmapsto g_k(x) = k\text{Log}\, x$$

   (x réel strictement positif).

   Construire, dans $\mathcal{R}$, C_1, C_2, C_3.

   b. En déduire la représentation graphique de f sur $[0\,;\,4]$.

Partie B

1. Démontrer que f est intégrable au sens de Riemann sur tout segment $[0\,;\,A]$ (A étant un réel strictement positif).
2. Démontrer que, pour tout entier naturel k, non nul,

   $$\int_k^{k+1} f(x)\,\text{d}x = k\int_k^{k+1} \text{Log}\, x\,\text{d}x = k(k+1)\text{Log}\,(k+1) - k^2\text{Log}\,(k) - k.$$

3. Déduire de 2. que, pour tout n de $\mathbb{N} - \{0\,;\,1\}$:

   $$\int_1^n f(x)\,\text{d}x = -\sum_{k=2}^{n} k\text{Log}\,(k) + n^2\text{Log}\,(n) - \frac{n(n-1)}{2}.$$

   [On pourra remarquer que $k(k+1) = (k+1)^2 - (k+1)$.]

4. **a.** n étant un entier supérieur ou égal à 2, démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2 et inférieur ou égal à n :

   $$k\text{Log}\, k \leqslant k\text{Log}\, n.$$

   En déduire que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k\text{Log}\, k \leqslant \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)\text{Log}\, n$.

   b. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2

   $$\int_1^n f(x)\,\text{d}x \leqslant \int_1^n x\text{Log}\, x\,\text{d}x.$$

   En déduire que

   $$\frac{n^2}{2}\text{Log}\,(n) - \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \leqslant \sum_{k=2}^{n} k\text{Log}\, k.$$

   c. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k\text{Log}\, k}{\dfrac{n^2}{2}\text{Log}\,(n)} = 1$.