

∞ Baccalauréat C Étranger groupe I juin 1980 ∞

EXERCICE 1

1. Le conjugué d'un élément z de \mathbb{C} est noté \bar{z} . Soit E l'ensemble des éléments u de \mathbb{C} tels que

$$u + \bar{u} + u\bar{u} = 0.$$

Représenter l'ensemble des images des éléments de E .

2. Dans un plan affine euclidien \mathcal{P} , on considère un triangle équilatéral ABC de centre O ($OA = OB = OC$). Soit S l'ensemble des similitudes directes s de \mathcal{P} telles que

$$(s(O) = O) \quad \text{et} \quad (A, s(B), s(C) \text{ sont alignés}).$$

Préciser l'ensemble décrit par $s(A)$ lorsque s décrit S .

EXERCICE 2

Soit E un espace vectoriel réel de dimension trois, rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; O_E désigne l'endomorphisme nul de E .

On se propose de déterminer

- un endomorphisme f de E tel que $f(\vec{i}) = \vec{j}$,

- un endomorphisme g de E tel que $g(\vec{j}) = \vec{k}$,

ces endomorphismes satisfaisant en outre aux relations

$$f \circ f = O_E, \quad g \circ g = O_E, \quad f \circ g = g \circ f$$

1. On suppose qu'un tel couple (f, g) d'endomorphismes existe. Démontrer que l'on a nécessairement

$$f(\vec{k}) = g(\vec{j}) = \vec{0}, \quad f \circ g = O_E.$$

2. Combien le problème posé admet-il de solutions ?

PROBLÈME

Partie A

Soit f une primitive, sur \mathbb{R} , de l'application φ qui, à tout réel t , associe

$$\varphi(t) = \frac{1}{-2t^2 - 2t + 1}.$$

1. Soit g l'application de l'intervalle $S =]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[$ dans \mathbb{R} définie par

$$g(u) = f\left(\frac{1 + \operatorname{tg} u}{2}\right).$$

Prouver que g est différentiable sur S , puis que g est une fonction affine.

2. Montrer que $\int_0^1 t \, dt$

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{1}{-2t^2 - 2t + 1} \, dt.$$

Partie B

On considère l'application I de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dans \mathbb{R} définie par

$$I(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt.$$

1. En majorant convenablement $t(1-t)$ pour $t \in [0; 1]$, trouver la limite de la suite u telle que $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = I(n, n)$.
2. Montrer que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad I(p+1, q+1) = \frac{q+1}{p+2} I(p+2, q)$$

(on pourra utiliser une intégration par parties), puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I(n, n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Partie C

1. Après avoir remarqué que

$$2t^2 - 2t + 1 = 1 - 2t(1-t),$$

simplifier

$$\frac{1}{2t^2 - 2t + 1} - 1 - \sum_{k=1}^n 2^k t^k (1-t)^k.$$

2. On considère la suite v telle que $v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Quelle est la limite de la suite w telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n = \sum_{k=1}^n v_k?$$