Baccalauréat C Grenoble juin 1980

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Soit n un entier positif, θ un réel appartenant à $]0\,;\,\pi[$. On considère :

$$\begin{array}{rcl} S_n &=& \cos^2\theta + \cos^2\theta\cos 2\theta + \ldots + \cos^p\theta\cos p\theta + \ldots + \cos^n\theta\cos n\theta \\ S'_n &=& \cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta\sin 2\theta + \ldots + \cos^p\theta\sin p\theta + \ldots + \cos^n\theta\sin n\theta \\ \sum_n &=& S_n + \mathrm{i}S'_n. \end{array}$$

Montrer que $\sum_n$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique complexe, dont on déterminera le premier terme et la raison.
En déduire la valeur de $\sum_n$ puis de S_n en fonction de n et θ.
$\left(\text{On montrera que } S_n = \dfrac{\cos^{n+1}\theta\sin^n\theta}{\sin\theta}\right)$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par

$$f(x) = 1 - \left|\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{3x}\right|$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.
2. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
3. Soit λ un réel négatif. Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient $\lambda \leqslant x \leqslant 0$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 1$.
   Montrer que $\mathscr{A}(\lambda)$ a une limite quand λ tend vers $-\infty$.

PROBLÈME **13 POINTS**

E désignant un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $\mathscr{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E. Si $f \in \mathscr{L}(E)$, $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ désignent respectivement le noyau de f et l'image de f.
On rappelle que $\mathscr{L}(E)$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que $\mathscr{L}(E)$ muni de l'addition et de la loi $\circ$ de composition des applications est un anneau ; on rappelle que :

$$\forall (f,\ g) \in (\mathscr{L}(E))^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda.f)\circ g = \lambda.(f\circ g).$$

L'application nulle de E dans E est notée θ ; l'identité de E est notée I.

Partie A

Dans cette partie du problème, E est de dimension 3 muni d'une base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
Pour tout réel m non nul, on définit l'endomorphisme f_m par

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_m\left(\vec{\imath}\right) &=& 2m\vec{\imath} - m\vec{\jmath} - m\vec{k} \\ f_m\left(\vec{\jmath}\right) &=& -m\vec{\imath} + 2m\vec{\jmath} - m\vec{k} \\ f_m\left(\vec{k}\right) &=& -m\vec{\imath} - m\vec{\jmath} + 2m\vec{k} \end{array}\right.$$

$\mathscr{F}$ est l'ensemble des applications f_m quand m décrit $\mathbb{R}^\star$.

1. Déterminer le noyau et l'image de f_m.

2. Soit Π le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$.
Déterminer la restriction de f_m à Π.

3. Démontrer qu'il existe une projection vectorielle p et une homothétie vectorielle h telles que $f_m = p \circ h = h \circ hp$.
(On pourra par exemple décomposer un vecteur de E sur le noyau et l'image de f_m).

4. Montrer que $(F, \circ)$ est un groupe commutatif.
Préciser l'élément neutre de ce groupe et l'élément symétrique dans F d'un élément f_m quelconque.

5. Déterminer l'endomorphisme $\left(f_m\right)^2 - 3m \cdot f_m \quad \left(\left(f_m\right)^2 = f_m \circ f_m\right)$.

Partie B

Dans cette partie E est un espace vectoriel de dimension finie ; a, b, c sont trois réels et a est non nul. On considère l'équation

$$a.f^2 + b.f + c.I = \theta \qquad (1)$$

dans $\mathcal{L}(E) \quad \left(f^2 = f \circ f\right)$.

1. Montrer que si $b^2 - 4ac > 0$ il existe au moins un endomorphisme f solution de (1).

2. Montrer que si $c \neq 0$, toute solution f de (1) est un automorphisme de E (on rappelle qu'un automorphisme de E est un endomorphisme bijectif de E).

3. On suppose que $b = c = 0$.

   a. Montrer qu'une endomorphisme f de E est solution de (1) si et seulement si son image est incluse dans son noyau.

   b. Que peut-on dire sur l'image et le noyau d'une solution de (1) dans le cas où E est de dimension 2 ou de dimension 3 ?

Partie C

Dans cette partie E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, a et b sont deux réels non nuls.
On considère l'équation

$$a.f^2 + b.f = \theta. \qquad (2)$$

1. Soit f une solution de (C2)

   a. Montrer que $\ker f = \ker f^2$ et $\text{Im } f = \text{Im} f^2$.

   b. Montrer que $\ker f$ et $\text{Im } f$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E.
   On pourra remarquer que

$$\forall \overrightarrow{u} \in E, \quad \overrightarrow{u} = \left[\overrightarrow{u} + \frac{a}{b} f\left(\overrightarrow{u}\right)\right] - \frac{a}{b} f\left(\overrightarrow{u}\right).$$

   c. Déterminer la restriction de f à $\text{Im } f$.

   d. Si $\ker f = \{\overrightarrow{0}\}$ quelle est l'application f ?

   e. Montrer que f est la composée commutable de deux endomorphismes simples que l'on précisera.

2. Soient V' et V'' deux sous-espaces supplémentaires de E. Montrer qu'il existe une solution unique de (2) telle que $\ker f = V'$ et $\text{Im } f = V''$.

3. Conclure.