Baccalauréat C Japon, Hong Kong juin 1980

EXERCICE 1

1. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (1) :

$$11a + 7b = 1980.$$

   a. Montrer que, pour tout couple $(a,\ b)$ solution de (1), b est divisible par 11.

   b. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

2. Déterminer tous les couples $(p,\ q)$ d'entiers naturels non nuls, tels que

$$11m + 7d = 1980$$

   où m désigne le PPCM de p et de q, et d leur PGCD.

EXERCICE 2

Soit le plan affine P euclidien rapporté à un repère orthonormé. À tout point $M(x\ ;\ y)$ on associe les points $A(0,\ ;\ x)$ et $B(-y\ ;\ 0)$, puis le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ barycentre des points M, A, B affectés respectivement des coefficients $(1-\alpha-\beta)\,;\alpha\,;\,\beta$. ($\alpha$ et β sont des nombres réels).
On désigne par $f_{\alpha,\ \beta}$ l'application de P dans P telle que $f_{\alpha,\ \beta}(M) = M'$.

1. Montrer que x' et y' vérifient

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & (1-\alpha-\beta)x - \beta y\\ y' & = & \alpha x + (1-\alpha-\beta)y.\end{array}\right.$$

   En déduire que $f_{\alpha,\ \beta}$ est une application affine laissant au moins un point invariant.

2. Déterminer les couples de réels $(\alpha,\ \beta)$ tels que $f_{\alpha,\ \beta}$ soit involutive.
3. Déterminer la nature de l'involution qui correspond $\alpha > \beta$. (On pourra chercher d'abord l'ensemble des points invariants).

PROBLÈME

E étant l'espace vectoriel des fonctions numériques définies et continues sur $\mathbb{R}_+ = [0\ ;\ +\infty[$, on associe à toute fonction f de E la fonction $T(f) = F$ définie par

$$\left\{\begin{array}{l c l} F(0) & = & f(0)\\ F(x) & = & \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{si } x > 0.\end{array}\right.$$

Partie A

1. On considère les deux fonctions f_1 et f_2 de E définies par

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad \text{et} \quad f_2(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

   On pose $F_1 = T\left(f_1\right)$ et $F_2 = T\left(f_2\right)$.

a. Calculer les primitives de f_1 et f_2 sur $\mathbb{R}_+$. Trouver des expressions de $F_1(x)$ et $F_2(x)$ valables pour tout $x \geqslant 0$.

b. Étudier la fonction f_2. Tracer sur un même graphique les représentations de f_2 et F_2. Interpréter graphiquement $F_2(1)$.

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$$

a. Déterminer les réels a et b tels que. pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

En déduire que pour tout $x > 0$

$$F(x) = \frac{2\text{Log}\,(x+1)}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

b. Vérifier que F est élément de E. Montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$-t^2 < f(t) - 1 < 0.$$

En déduire que F est dérivable en 0.

c. Quel est le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$? Montrer que, pour tout $x > 0$, il existe $x' \in]0\,;\,x[$ tel que $F(x) = f\left(x'\right)$.
Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{1}{x}[f(x) - F(x)].$$

En déduire que F est monotone sur R_+. Quelle est l'image de R_+ par F ?

Partie B

1. Montrer, en utilisant le théorème de la moyenne, que T est une application de E dans E. Montrer que T est linéaire et injective.

2. Montrer que tout élément de E possédant sur R_+ une dérivée continue admet un antécédent par T que l'on déterminera.

3. Soit E$'$ l'ensemble des applications g définies sur R_+ par

$$g(x) = \text{e}^x\left(ax^2 + bx + c\right) \quad \text{avec } (a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Montrer que E$'$ est un sous-espace vectoriel de E dont une base est $\left(g_1,\, g_2,\, g_3\right)$ avec

$$g_1(x) = \text{e}^x \quad ; \quad g_2(x) = x\text{e}^x \quad ; \quad g_3(x) = x^2\text{e}^x.$$

Montrer que $T\left(E'\right)$ est un sous-espace vectoriel de E dont une base est $\left(g_1,\, g_2,\, g_4\right)$ avec

$$\left\{\begin{array}{lcl} g_4(0) & = & 1 \\ g_4(x) & = & \dfrac{\text{e}^x - 1}{x} \quad \text{si } x > 0. \end{array}\right.$$