Baccalauréat C Limoges septembre 1980

EXERCICE 1

Dans le système de numération à base cinq, l'entier naturel n s'écrit

$$n = \overline{3x4y0}.$$

1. Quels sont les couples $(x\ ;\ y)$ tels que n soit divisible par quatre ?
2. Quels sont les couples $(x\ ;\ y)$ tels que n soit divisible par six ?
3. Quels sont les couples $(x\ ;\ y)$ tels que n soit divisible par douze ? En déduire qu'il existe un seul n divisible par douze tel que x soit strictement inférieur à y ; donner son écriture dans le système décimal.

EXERCICE 2

1. Dans le plan vectoriel P rapporté à la base $\left(\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$, on considère la projection p sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur $a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ $(a \in \mathbb{R}^\star,\ b \in \mathbb{R})$, et dont la direction est déterminée par le vecteur $\vec{\jmath}$; et la projection q sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur $c\vec{\imath} + d\vec{\jmath}$ $(c \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R}^\star)$, et dont la direction est déterminée par le vecteur $\vec{\imath}$.
   Soit alors f l'application linéaire $f = ap + dq$.
   (Rappel : $\mathbb{R}'$ désigne l'ensemble $\mathbb{R} - \{0\}$ des réels non nuls.)
   Former la matrice M de f dans la base $\left(\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$.
2. Utiliser les résultats de la question précédente pour décomposer sous la forme $ap + dq$ l'application linéaire g de matrice $A = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$, p et q étant deux projections vectorielles que l'on précisera, a et d deux réels que l'on calculera.

PROBLÈME

On notera dans ce problème, V l'espace vectoriel des fonctions f à valeurs réelles définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$; et l'on désignera par f' la dérivée première de la fonction f.
Le nombre réel θ étant élément de l'intervalle $]\,0\,;\,1\,[$, le but du problème est d'étudier pour certaines fonctions f de V l'ensemble $\mathrm{E}(f\ ;\ \theta)$ des réels x tels que l'on ait

$$(1) \qquad f(x+1) - f(x) = f'(x+\theta).$$

Partie A

On étudie $\mathrm{E}(f\ ;\ \theta)$ pour les fonctions polynômes.

1. Caractériser $\mathrm{E}(f\ ;\ \theta)$ pour les fonctions affines

$$f:\quad x \longmapsto ax+b.$$

2. Si f est une fonction polynôme de degré deux

$$f:\quad x \longmapsto ax^2+bx+c,$$

   avec $a \neq 0$, montrer que $\mathrm{E}(f\ ;\ \theta)$ est non vide pour une valeur unique t_0 de θ, que l'on calculera ; caractériser $\mathrm{E}\left(f\ ;\ t_0\right)$.

3. On considère dans cette question la fonction polynôme de degré trois

$$f:\quad x \longmapsto x^3$$

a. Montrer que $\mathrm{E}(f\ ;\ \theta)$ est vide pour une valeur unique t_1 de θ que l'on calculera ; caractériser $\mathrm{E}(f\ ;\ \theta)$ pour $\theta \neq t_1$.

b. On considère la fonction φ de la variable réelle θ

$$\varphi:\ \theta \longmapsto \frac{3\theta^2-1}{3(1-2\theta)}.$$

Étudier cette fonction φ sur l'intervalle $]0\,;\,1[$, et en tracer la représentation graphique par rapport à un repère orthonormé (unité d'axes : 6 cm).

c. Déduire de a. et de b. que, x étant fixé dans $\mathbb{R}$, il existe au moins une valeur de θ dans $]0\,;\,1[$ telle que x soit élément de l'ensemble $\mathrm{E}(f\ ;\ \theta)$; on précisera les valeurs de x pour lesquelles il existe deux telles valeurs de θ.

Partie B

On considère les fonctions exponentielles f_m du type

$$f_m : x \longmapsto \mathrm{e}^{mx},\ \text{où } m \text{ est un réel strictement positif.}$$

1. Montrer que, à chaque valeur strictement positive de m, on peut associer un nombre réel et un seul, noté θ_m, tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_m(x+1) - f_m(x) = f'_m\left(x+\theta_m\right),$$

et exprimer θ_m en fonction de m.

2. Étudier la variation de chacune des fonctions

$$g_1:\quad t \longmapsto \mathrm{e}^t - t - 1 \quad \text{et} \quad g_2:\quad t \longmapsto t\mathrm{e}^t - t - 1.$$

En déduire que pour m strictement positif, $g_1(m)$ et $g_2(m)$ sont strictement positifs.

3. À l'aide du résultat précédent, montrer que les réels θ_m déterminés au 1. sont tous strictement compris entre 0 et 1.

4. Le nombre strictement positif m étant fixé, caractériser $\mathrm{E}\big(f_m\ ;\ \theta\big)$ suivant les différentes valeurs du réel θ de $]0\,;\,1[$.

Partie C

Le réel θ étant fixé dans $[0\,;\,1[$, on considère les fonctions f satisfaisant à la relation (1) pour toute valeur réelle de la variable x, et on note V_θ leur ensemble.

1. Montrer que V_θ constitue un sous-espace vectoriel de V.

2. Montrer par récurrence que, si une fonction indéfiniment dérivable est élément de V_θ il en est ainsi de toutes ses dérivées successives.

3. **a.** Déduire des résultats précédents que les seules fonctions polynômes de V_θ sont les fonctions affines, sauf pour $\theta = \dfrac{1}{2}$.

b. Quelles sont les fonctions polynômes de $\mathrm{V}_{\frac{1}{2}}$?