Baccalauréat C Lyon septembre 1980

I.

1. Quels sont les entiers naturels dont le carré est un diviseur de 1 980 ?
2. Soit a et b des éléments de $\mathbb{N}^*$ dont le p.g.c.d. est noté d et le p.p.c.m. est noté m. Déterminer a et b sachant que

$$m^2 - 5d^2 = 1980.$$

II.

1. Étudier la fonction numérique f définie par 1

$$f(x) = \frac{1}{x\text{Log}x},$$

   où Log x désigne le logarithme népérien de x, et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$ est continue et strictement décroissante sur $]1\,;\,+\infty[$.
   Déterminer ses limites lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures et lorsque x tend vers $+\infty$.
   En déduire qu'il existe un seul point d'intersection de (C) et de la droite d'équation $y = x$.
   On désigne par α l'abscisse de ce point. Vérifier que $\alpha < \text{e}$.
3. Calculer en fonction de α l'aire de la portion du plan ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{ccccc}\alpha & \leqslant & x & \leqslant & \text{e}\\ f(x) & \leqslant & y & \leqslant & x.\end{array}\right.$$

III.

Soit P un plan affine euclidien orienté associé au plan complexe muni de sa structure euclidienne et soit $\mathcal{R} = \left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé direct de P.

Partie A

m étant un réel donné, soit f_m l'application affine de P dans P qui au point M de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ associe le point M' de coordonnées $(x'\,;\,y')$ dans $\mathcal{R}$ telles que

$$\left\{\begin{array}{ccc}x' & = & my + m + 1\\ y' & = & mx + m + 1.\end{array}\right.$$

1. On désigne par z et z' les affixes respectives de deux points M et M'. Exprimer z' en fonction de z lorsque $M' = f_m(M)$.
2. À quelle condition f_m est-elle bijective ?
3. Donner suivant les valeurs de m l'ensemble des points de P invariants par f_m.
4. Montrer que f_1 est la composée de deux applications simples qui commutent et qu'on déterminera.
5. Caractériser f_{-1}.

6. On suppose m différent de 0, de 1, et de -1. Montrer que f_m est la composée de deux applications simples qui commutent et qu'on déterminera. $\left(\text{on pourra utiliser } \epsilon = \dfrac{m}{|m|}.\right)$

7. Dans cette question on prend $m = \dfrac{1}{2}$ et on considère la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de P définie de la façon suivante :
   M_0 est le point de coordonnées $(1\,;\,0)$ et pour tout entier naturel n : $_{Mn+1} = f_{\frac{1}{2}}(M_n)$.
   a. Démontrer que $f_{\frac{1}{2}} \circ f_{\frac{1}{2}}$ est une homothétie dont on précisera le centre Ω et le rapport.
   Sur un dessin, tracer le repère $\mathcal{R}$ et placer les points Ω, M_0, M_1, M_2 et M_3.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M_{2n}}$ et $\overrightarrow{\Omega M_{2n+}}$ en fonction de deux vecteurs fixes.
   En déduire que les points M_n appartiennent, quand n décrit $\mathbb{N}$, à la réunion de deux demi-droites affines qu'on précisera.
   c. Pour tout entier naturel n, on désigne par x_n, et y_n les coordonnées du point M_n. Calculer les valeurs de x_{2n} et y_{2n}, x_{2n+1} et y_{2n+1} en fonction de n.
   Montrer que, pour tout entier naturel n, $|x_n - 3|$ et $\left|y_n - 3\right|$ sont majorés par $\dfrac{3}{2^n}$
   Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ?

Partie B

1. On considère les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et}\, v(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

   a. Dresser le tableau de variations de v [on remarquera que $v(0) = 0$] puis celui de u.
   b. Montrer que pour tout x réel $[u(x)]^2 - [v(x)]^2 = 1$.

2. Soit M un point mobile dont les coordonnées dans $\mathbb{R}$ sont définies à l'instant t par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} + 2\\ y &=& \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} - 1.\end{array}\right.$$

   En utilisant les propriétés du **1.**, démontrer que la trajectoire T de M (quand t décrit $\mathbb{R}$) est incluse dans une conique K qu'on caractérisera (centre, sommets, asymptotes éventuelles).
   Préciser la portion de cette conique qui est effectivement la trajectoire T de M.
   Tracer cette trajectoire dans le repère R.

3. **a.** Déterminer les vecteurs vitesse et accélération de M.
   b. Pour quelles valeurs de t le mouvement est-il accéléré ? retardé ?
   Indiquer sur le dessin les parties correspondantes de T.

Partie C

Soit O′ un point de P. On désigne par $\mathcal{R}'$ le repère $\left(\mathrm{O}', \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ orthonormé de P.

Soit H l'hyperbole d'équation $\dfrac{X^2}{4} - Y^2 = 1$ dans $\mathcal{R}'$.
On désigne par D′et D″ les droites d'équations respectives $Y = 0$ et $X = 0$ dans $\mathcal{R}'$.
On utilisera, dans la suite, le fait que D′ et D″ sont les seuls axes de symétrie orthogonale de H et que leur intersection O′ est le seul centre de symétrie de H.
Soit f une similitude de P telle que f(H) = H [donc $f^{-1}(H) = H$]. On note φ son endomorphisme associé et g la symétrie de centre O′.

1. Montrer que $G = f \circ g \circ f^{-1}$ est la symétrie de centre $f\left(\text{O}'\right)$ et que G(H) = H.
   En déduire que $f\left(\text{O}'\right) = \text{O}'$.
2. On désigne par s' et s'' les symétries orthogonales d'axes respectifs D′ et D″.
   On pose $S' = f \circ s' \circ f^{-1}$ et $S'' = f \circ s'' \circ f^{-1}$.
   - **a.** Montrer que S' et S'' sont deux isométries involutives ; en déduire que ce sont les symétries orthogonales d'axes f(D′) et f(D″).
   - **b.** Montrer que S'(H) = H et S''(H) = H.
     En considérant les images par f des sommets de H, en déduire que f(D′) = D′ et f(D″) = D″.
3. **a.** Montrer que $\varphi\left(\overrightarrow{\imath}\right) \in \{\{\overrightarrow{\imath}, -\overrightarrow{\imath}\}$. En déduire que f est une isométrie.
   - **b.** Montrer que l'ensemble des similitudes f de P telles que f(H) = H est un groupe à quatre éléments.
4. On désigne par K′ l'image de la conique K [définie en B) **2.** par l'application f_3 (définie en A) pour $m = 3$] et on suppose que O′ est le centre de K.
   - **a.** Montrer que K′ est une hyperbole (on pourra déterminer une équation de K′ dans $\mathbb{R}$).
   - **b.** Soit F une similitude de P. Montrer que F(K) = K′ si, et seulement si,
     $\left[\left(f_3\right)^{-1} \circ F\right]$(K) = K.
     En déduire que l'ensemble des similitudes F de P qui transforment K en K′ est constitué par deux similitudes directes et deux similitudes indirectes.