Baccalauréat C Montpellier juin 1980

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto f(x) = 3x - 3\log\left|2\text{e}^x - 1\right|$$

et soit G la représentation graphique de cette fonction dans un plan affine P muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Démontrer que G admet trois asymptotes passant par un même point. On ne demande pas de construire G.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Soit n un entier naturel, on pose $a = 2n+8$, $b = 3n+15$.
On désigne par δ le PGCD de a et b.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, δ divise 6.
2. Déterminer l'ensemble S des entiers naturels n pour lesquels $\delta = 6$, c'est-à-dire l'ensemble

$$S = \{n \in \mathbb{N} / \text{PGCD}(2n+8,\ 3n+15) = 6\}.$$

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit P un plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on identifie P au plan complexe en associant à tout point M de coordonnées $(x\,;\ y)$ le nombre complexe $z = x + \text{i}y$ appelé affixe de M.
Soit T l'application qui, au point M de P d'affixe Z associe le point M' d'affixe

$$Z' = (1+\text{i})Z - \text{i}.$$

1. a. Cette application est-elle une bijection du plan sur lui-même ? Si oui, définir T^{-1}.
   b. Caractériser géométriquement la transformation T. On notera A le point invariant par T. Donner une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{\text{A}M}, \overrightarrow{MM'}}\right)$ en supposant M distinct de A.
   c. Montrer qu'il existe un point B du plan, distinct de A, et un seul, tel que les affixes Z_0 de B et Z'_0 de $\text{B}' = T(\text{B})$ soient liées par la relation $Z_0 Z'_0 = 1$. Construire B et B$'$.
   d. Quelle est la transformée (D$'$) par T de la droite (D) d'équation $x - y - 1 = 0$?
   Donner une mesure de l'angle de (D) et (D$'$).
   e. Quelle est la transformée (H') par T de la courbe (H) d'équation $y = \dfrac{1}{4(1-x)}$? Préciser les éléments géométriques remarquables de (H').
2. a. Déterminer l'équation de l'ensemble (C$'$) des points M' lorsque M parcourt le cercle (C) de centre O et de rayon 1.
   Montrer que cet ensemble (C$'$) peut être déterminé géométriquement en utilisant uniquement la nature de la transformation T.

b. On suppose le point M animé d'un mouvement uniforme sur le cercle (C). On suppose aussi que la vitesse angulaire est égale à 1 et qu'à l'instant de date $t = 0$, le point M a pour coordonnées $(1~;~0)$. Le mouvement de M' sur (C$'$) est-il uniforme ? Quelle est la vitesse angulaire du mouvement de M' ?

3. Soit M un point quelconque du plan P, M' son image par T et G le barycentre des points A, M, M' affectés des coefficients respectifs $+1$, $+2$, -1.

a. Donner une construction géométrique de G, connaissant A, M et M'.

b. Calculer l'affixe Z'' de G en fonction de l'affixe Z de M et définir géométriquement l'application qui au point M associe le point G.

c. Quel est l'ensemble des points G lorsque M décrit la droite $\left(\text{A}, \overrightarrow{v}\right)$?

4. Soit x et y les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

a. Calculer le module r de Z', affixe de $M' = T(M)$, en fonction de x et y.

b. On suppose que M décrit la droite d'équation $y = x$.
On définit une fonction $\varphi~:~x \longmapsto \varphi(x) = r$.
Étudier φ et tracer sa représentation graphique.