Baccalauréat C Orléans–Tours septembre 1980

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit P un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On rappelle que l'affixe d'un point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ est le nombre complexe $z = x + \text{i}y$.

On donne des réels r et α avec $r > 0$ et $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$ et on note u le nombre complexe de module r, d'argument α.

1. On construit les points A_n de P répondant aux conditions :

- A_0 est l'origine du repère ;
- A_1 est le point d'affixe i ;
- pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le point A_n est l'image de A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-1} de rapport r, dont une mesure de l'angle est α.

On note z_n l'affixe du point A_n.

a. Écrire pour tout entier n supérieur ou égal à 2 une relation entre z_n, z_{n-1} et z_{n-2}.

b. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a

$$z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}\text{i}.$$

c. Déterminer l'expression de l'affixe z_n de A_n en fonction de n et de u.

2. a. Montrer qu'il existe une similitude directe S et une seule telle que

$$\text{A}_1 = S\left(\text{A}_0\right) \quad \text{et} \quad \text{A}_2 = S\left(\text{A}_1\right).$$

Préciser les éléments caractéristiques de S.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\text{A}_{n+1} = S\left(\text{A}_n\right)$.

On note S^0 l'application identique de P, et pour tout entier naturel n. on pose $S^{n+1} = S \circ S^n$. Soit $p \in \mathbb{N}$; montrer que : .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{A}_{n+p} = S^n\left(\text{A}_p\right).$$

c. Montrer que S^4 est une homothétie.

d. En déduire que les points A_n sont éléments d'un ensemble formé par la réunion de quatre droites que l'on précisera.

3. On suppose maintenant $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On appelle Ω le centre de la similitude S.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, les vecteurs $\overrightarrow{\Omega\text{A}_{n+1}}$ et $\overrightarrow{\text{A}_n\text{A}_{n+1}}$ sont orthogonaux.

b. Représenter graphiquement les points A_0, A_1, A_2, ... , A_9 dans le repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité 4 cm).

c. Calculer $\left\|\overrightarrow{\Omega\text{A}_{n+1}}\right\|$ en fonction de n et de $\left\|\overrightarrow{\Omega\text{A}_0}\right\|$. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|\overrightarrow{\Omega\text{A}_0}\right\|.$$

d. Pour tout entier n, calculer $L_n = \sum_{i=0}^{n} \left\| \overrightarrow{A_iA_{i+1}} \right\|$. Étudier la limite de la suite (L_n) quand n tend vers $+\infty$.

4. On suppose toujours que u est de module $r\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'argument $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$.

a. Vérifier que la similitude directe S est l'application de P dans P qui au point M d'affixe $x + \mathrm{i}y$ associe le point M$'$ d'affixe $x' + \mathrm{i}y'$ tel que : 1

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & \dfrac{1}{2}(x - y)\\ y' & = & \dfrac{1}{2}(x + y) + 1.\end{array}\right.$$

b. Soit Γ la courbe du plan P dont une équation dans $\mathscr{R}$ est $xy = -1$.
Déterminer une équation de l'image Γ' de Γ par S. Préciser la nature de Γ'.

c. Tracer les courbes Γ et Γ' dans le repère $\mathscr{R}$ (sur le même dessin)