Baccalauréat C Orléans–Tours juin 1980

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Soit l'équation

$$4x^3+x^2+x-3=0 \qquad (1)$$

1. Montrer, en étudiant la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=4x^3+x^2+x-3$$

que l'équation (1) n'a qu'une solution réelle, qui de plus, appartient à l'intervalle $]0\,;\,1[$.

2. Montrer que si l'équation (1) a une solution rationnelle $\dfrac{p}{q}$, où p et q sont premiers entre eux, alors p divise 3 et q divise 4.
Quels sont les rationnels vérifiant cette dernière condition ?

3. Déterminer la solution rationnelle $\dfrac{p}{q}$ de l'équation (1) et, après avoir mis en facteur $(qx-p)$ dans l'expression de $f(x)$, achever la résolution de l'équation (1) dans le corps des complexes.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit A, B et C trois points alignés deux à deux distincts dans un plan affine E associé à un plan vectoriel $\overrightarrow{E}$.
On pose $\overrightarrow{\text{AC}}=\lambda\overrightarrow{\text{AB}}$, où $\lambda\in\mathbb{R}$.

1. a. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le triplet (α,β,γ) de $\mathbb{R}^3$ pour que le propriété suivante soit vérifiée

A est le barycentre du système (B, β), (C, γ),
et B est le barycentre du système (A, α), (C, γ),
et C est le barycentre du système (A, α), (B, β).

b. On vérifiera que l'ensemble X des triplets $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ satisfaisant à cette condition est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $\overrightarrow{u}=(\lambda-1\ ;\ -\lambda\ ;\ 1)$, privée du vecteur nul.

2. Soit $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ un élément de X.

a. Soit f la fonction de E dans $\overrightarrow{E}$ définie par

$$\forall M\in E,\quad f(M)=\alpha\overrightarrow{M\text{A}}+\beta\overrightarrow{M\text{B}}+\gamma\overrightarrow{M\text{C}}.$$

Déterminer l'image de E par f.

b. Dans le cas où E est euclidien, on considère la fonction Φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall M\in E,\quad \Phi(M)=\alpha M\text{A}^2+\beta M\text{B}^2+\gamma M\text{C}^2.$$

Montrer que Φ est constante.

PROBLÈME **13 POINTS**

Partie A

Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** Justifier l'existence de I_n.

b. Sans calculer I_n, montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante dont tous les termes sont positifs.

2. **a.** Pour tout entier naturel n, calculer la dérivée de la fonction $x \longmapsto \tan^{n+1} x$. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}.$$

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

c. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d. Calculer $f(n) = I_{n+4} - I_n$ en fonction de n, où $n \in \mathbb{N}^\star$.

3. **a.** Calculer I_2.

b. Calculer $f(2) + f(6) + f(10) + \cdots + f(4k-2)$ en fonction de I_2 et de I_{4k+2}, où $k \in \mathbb{N}^\star$.

c. En déduire la limite de la somme

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots - \frac{1}{4k-1} + \frac{1}{4k+1}.$$

lorsque k tend vers $+\infty$.

4. **a.** Vérifier que la fonction $x \longmapsto \log(\cos x)$ est définie et dérivable sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$ et déterminer sa dérivée.
Calculer I_1.

b. Calculer $f(1) + f(5) + f(9) + \ldots + f(4k-3)$ en fonction de I_1 et de I_{4k+1}, où $k \in \mathbb{N}^\star$.

c. En déduire la limite de la somme

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$$

lorsque k tend vers $+\infty$.

Partie B

Soit α un réel donné élément de $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right[$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, K_n(\alpha) = \int_0^{\alpha} \tan^n x\,\mathrm{d}x \quad \text{et}$$

$$S_n(\alpha) = K_1(\alpha) + K_2(\alpha) + \cdots + K_n(\alpha).$$

1. Soit x un élément de $[0\,;\,\alpha]$. Calculer pour n entier naturel non nul, $\left|\tan x + \tan^2 x + \cdots + \tan^n x\right|$ en fonction de x et de n. Montrer que

$$\left|\tan x + \tan^2 x + \cdots + \tan^n x - \frac{\tan x}{1-\tan x}\right| = \frac{\tan^{n+1} x}{1-\tan x}.$$

2. Étudier le sens de variation de la fonction g_p, où $p \in N^\star$, définie sur $[0 ; \alpha]$ par $g_p(x) = \dfrac{\tan^p x}{1-\tan x}$. En déduire que

$$\forall p \in \mathbb{N}^\star, \forall x \in [0 ; \alpha], 0 \leqslant \dfrac{\tan^p x}{1-\tan x} \leqslant \dfrac{\tan^p \alpha}{1-\tan \alpha}.$$

3. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}^\star, \quad \left|S_n(\alpha) - \int_0^\alpha \dfrac{\tan x}{1-\tan x}\right| \leqslant \dfrac{\alpha \tan \alpha}{1-\tan \alpha}.$$

En déduire l'existence de la limite de la suite $(S_n(\alpha))_{n\in N^\star}$ quand n tend vers $+\infty$.

4. On se propose de préciser cette limite.

a. Montrer que la fonction $x \longmapsto \log(\cos x - \sin x)$ est définie et dérivable sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right[$. Calculer sa dérivée.

b. On pose

$$A(\alpha) = \int_0^\alpha \dfrac{\sin x}{\cos x - \sin x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et}$$

$$B(\alpha) = \int_0^\alpha \dfrac{\cos x}{\cos x - \sin x}\,\mathrm{d}x$$

Calculer $B(\alpha) - A(\alpha)$ et $B(\alpha) + A(\alpha)$ puis $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$. En déduire la valeur de la limite de la suite $(S_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ quand n tend vers $+\infty$.

Partie C

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $S'_n = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$.
On se propose de démontrer que la suite $\left(S'_n\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, c'est à dire que

$$\forall C \in R_+, \exists x_0 \in \mathbb{N}^\star, \forall n \in N^\star, \quad n > n_0 \Rightarrow S'_n > C.$$

Dans cette partie, α varie dans l'intervalle $\left]0 ; \dfrac{\pi}{4}\right[$.

1. a. Étudier la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers $\dfrac{\pi}{4}$. En déduire qu'il existe un élément α_0 de $\left]0 ; \dfrac{\pi}{4}\right[$ tel que $A(\alpha_0) > C + 1$.

b. En utilisant les résultats de la partie B, montrer que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^\star, \forall n \in \mathbb{N}^\star, n > n_0 \Rightarrow |A(\alpha_0) - S_n(\alpha_0)| < 1.$$

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall \alpha \in \left]0 ; \dfrac{\pi}{4}\right[, \quad S'_n \geqslant S_n(\alpha).$$

3. Utiliser ce qui précède pour montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S'_n = +\infty$.