Baccalauréat C Paris [1] juin 1980

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soient trois points non alignés A, B, C d'un plan affine euclidien $\mathscr{P}$.
On pose $d(\text{B, C}) = a$, $d(\text{C, A}) = b$, $d(\text{A, B}) = c$. On désigne par I le milieu du segment [BC]. Quels que soient les points P et Q du plan, on notera PQ la distance de ces points.

1. Établir l'égalité : $b^2 + c^2 = 2\text{AI}^2 + \dfrac{a^2}{2}$.
2. À tout point M du plan $\mathscr{P}$ on associe le réel :

$$\varphi(M) = M\text{B}^2 + M\text{C}^2 - M\text{A}^2.$$

   a. Soit G le barycentre des points B, C et A affectés respectivement des coefficients 1, 1 et -1.
   Donner une détermination simple de G et placer ce point sur la figure.
   b. Exprimer $\varphi(M)$ à l'aide de $M\text{G}$, a, b, c. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c pour qu'il existe un point M au moins vérifiant $\varphi(M) = 0$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit la famille d'équations :

$$z^2 - (1 + \text{i}\sin 2\theta)z + \frac{1}{2}\sin 2\theta = 0 \qquad (E_\theta)$$

dans laquelle θ désigne un réel appartenant à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}~;~\dfrac{\pi}{2}\right[$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan affine muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; à tout complexe $z = x + \text{i}y$, $(x~;~y)$ étant élément de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on associe le point M de coordonnées $(x~;y)$ dans $\mathscr{P}$.

1. Résoudre l'équation (E_θ) dans l'ensemble des nombres complexes. Préciser la cas des racines doubles.
2. Soient $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ les points de $\mathscr{P}$ associées aux solutions $z'(\theta)$ et $z''(\theta)$ de l'équation (E_θ) et soit $I(\theta)$ le milieu du segment $[M'(\theta), M''(\theta)]$.
   a. Déterminer l'ensemble des points $I(\theta)$ quand θ décrit $\left]-\dfrac{\pi}{2}~;~\dfrac{\pi}{2}\right[$.
   b. Montrer que l'ensemble des points $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ est un cercle $\mathscr{C}$ que l'on précisera.
   c. Démontrer, lorsque $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ sont distincts, que la droite contenant ces deux points a une direction indépendante de θ.
   d. θ étant donné $\left(\text{on fera la figure avec } \theta = \frac{\pi}{6}\right)$, déduire de ce qui précède une construction simple de $I(\theta)$ et des points $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$.
   Une figure soignée comportera tous les éléments intéressants de l'exercice.

1. Paris, Créteil, Versailles

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit f l'application de l'intervalle I $=]-1\ ;\ 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \longmapsto f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Partie A

1. **a.** Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout t appartenant à I :

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}.$$

   b. Calculer $f(x)$.
   Étudier les variations de l'application f (en particulier la parité) et construire la courbe représentative de f dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

2. Montrer que f est une bijection de I sur $\mathbb{R}$. En désignant par u un réel strictement positif, résoudre dans I l'équation $f(x) = \log u$. (On désigne par $\log u$ le logarithme népérien de u.)

Partie B

Soit r un rationnel strictement supérieur à 1. On pose $r = \dfrac{p}{q}$, p et q étant deux entiers naturels premiers entre eux.
On désigne par $\mathbb{N}'$ l'ensemble des entiers naturels strictement supérieur à 1.

1. Démontrer que si a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux vérifiant $a > b$, les entiers naturels $a+b$ et $a-b$ ont pour plus grand diviseur commun soit 1, soit 2. Préciser, en considérant les parités de a et de b, dans quelles conditions on obtient chacun de ces deux cas.
2. Montrer que, quel que soit r, l'équation

$$f\left(\frac{1}{m}\right) = \log r, \quad m \in \mathbb{N}'$$

   n'a pas de solution.
3. **a.** Résoudre les équations

$$\begin{aligned} 2f\left(\frac{1}{m}\right) &= \log 2, \quad m \in \mathbb{N}' \\ 2f\left(\frac{1}{m}\right) &= \log 4, \quad m \in N'. \end{aligned}$$

   b. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation :

$$2f\left(\frac{1}{m}\right) = \log r, \quad m \in \mathbb{N}'$$

   ait une solution est qu'il existe un entier naturel non nul k tel que
   $r = 1 + \dfrac{2}{k}$.
   Résoudre alors cette équation.
4. Soit l'équation à deux inconnues :

$$f\left(\frac{1}{m}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) = \log r, \quad (m, n) \in \mathbb{N}' \times \mathbb{N}'. \qquad (E_r)$$

a. Montrer que l'équation (E_r) a les mêmes solutions que l'équation :

$$(m-s)(n-s) = t, \quad (m\,;\, n) \in \mathbb{N}' \times \mathbb{N}'$$

où s et t désignent deux rationnels que l'on calculera en fonction de r.

b. Résoudre les équations

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{m}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) &= \log 2, \quad (m\,;\, n) \in \mathbb{N}' \times \mathbb{N}' \\ f\left(\frac{1}{m}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) &= \log 4, \quad (m\,;\, n) \in \mathbb{N}' \times \mathbb{N}' \end{aligned}$$