Baccalauréat C Poitiers juin 1980

EXERCICE 1 **3,5 POINTS**

Soit N l'entier naturel dont l'écriture dans le système décimal de numération de base 13 est : $N = \overline{25x3}$.
Pour quelles valeurs de x :

1. N est-il divisible par 6 ?
2. N est-il divisible par 4 ?
3. N est-il divisible par 24 ? (on précise ici que 24 est écrit dans le système de numération décimale).

EXERCICE 2 **4,5 POINTS**

1. Soit P le polynôme tel que :

$$P(z) = z^3 - (7+9\mathrm{i})z^2 + (39\mathrm{i} - 14)z + 50$$

pour tout nombre complexe z.

   a. Démontrer que le polynôme P admet une racine unique z_0 de la forme $z_0 = \mathrm{i}b$, avec b réel.

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$, sachant que $P(z)$ s'écrit :

$$P(z) = (z - \mathrm{i}b)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right).$$

   où α et β sont deux nombres complexes à déterminer. On notera z_1 la racine non « imaginaire pure », ayant la plus petite partie réelle, et z_2 la troisième racine.

2. Soient, dans le plan affine euclidien E_2 rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ les points A, B et C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2. Déterminer (et dessiner) l'ensemble des points M du plan E_2 tels que :

$$M\mathrm{A}^2 - M\mathrm{B}^2 + M\mathrm{C}^2 = 4.$$

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit P le plan affine euclidien, rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x telle que

$$f(x) = \frac{x^2\sqrt{3} - (\sqrt{3}+3)x - 3}{3(x-1)}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition, noté D, de la fonction f. Montrer qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

pour tout x de D.

2. Étudier la fonction f, établir en particulier le tableau de ses variations et tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

3. Démontrer que la courbe ($\mathscr{C}$) admet un centre de symétrie noté Ω, qu'on déterminera.

4. Soit u un nombre réel strictement supérieur à 1. Calculer l'aire S_u de la portion du plan comprise entre la courbe ($\mathscr{C}$) l'asymptote oblique de ($\mathscr{C}$) et les droites d'équations respectives

$$x = 2 - \frac{1}{u} \quad \text{et} \quad x = 2 + \frac{1}{u}.$$

Partie B

1. Soit $g :]1\ ;\ \infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(u) = 2\log\frac{u+1}{u-1}$$

pour tout $u > 1$.

Étudier cette fonction, établir le tableau de ses variations et tracer sa courbe représentative (Γ) dans un repère orthonormé.

2. **a.** Soit m un nombre réel tel que $1 < m < 2$. Calculer l'aire $\sum_m$ de la portion du plan comprise entre la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $u = m$ et $u = 2$. (Indication : on pourra utiliser, pour le calcul de m, une intégration par parties.)

b. Déterminer, si elle existe, la limite de m lorsque m tend vers 1 par valeurs strictement supérieures à 1.(Indication : on mettre en évidence dans l'expression de m, le nombre $(m-1)\log(m-1)$.)

3. Démontrer que la fonction g admet une fonction réciproque h dont on précisera les propriétés (ensemble de définition, sens de variation, continuité, dérivabilité). Expliciter la fonction h et tracer sa courbe représentative dans le même repère que (Γ).

Partie C

On orientera le plan $\mathscr{P}$ de façon que le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ soit direct. On rappelle que Ω est le centre de symétrie de la courbe ($\mathscr{C}$) (qui a été déterminé dans la question A 3.).

1. Déterminer une équation de la courbe ($\mathscr{C}$) dans le repère $\left(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

2. Soit φ la rotation affine dont le centre est Ω et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{6}$. Déterminer une équation, dans le repère $\left(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, de la courbe ($H$) transformée de ($\mathscr{C}$) par φ.

3. Préciser la nature de la courbe (H) et donner ses éléments caractéristiques (asymptotes et foyers).

Tracer (H) sur la même figure que ($\mathscr{C}$).