Baccalauréat C Polynésie française juin 1980

EXERCICE 1

Soit la fonction f numérique réelle de variable réelle définie par

$$x \neq 0, \quad f(x) = \frac{x-1}{x}\mathrm{e}^{x} \quad \text{et } f(0) = 0.$$

1. Donner le domaine de définition D de f et étudier les limites de f aux bornes des intervalles définissant D.
   Étudier la continuité de f pour $x = 0$.
2. Étudier le sens de variation de f.
   Représenter graphiquement f dans un plan de repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
3. Calculer en fonction de e une mesure de l'aire de la surface délimitée par la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f et par les droites d'équations

$$y = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 2.$$

   On pourra chercher une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ par une intégration par parties.

EXERCICE 2

1. **a.** Chercher le polynôme $P(x)$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ de degré 2 tel que pour tout élément x de $\mathbb{N}$ l'égalité suivante soit vraie

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = P(x).$$

   b. En déduire pour $x > 3$ l'écriture en base x du nombre entier naturel dont le carré est

$$A = 10 \times 11 \times 12 \times 13 + 1.$$

   Tout nombre surmonté d'une barre est écrit dans la base x.
2. Écrire en base x (où $x > 3$) le carré de $\overline{11}$, le cube de $\overline{11}$.
3. Quels sont les diviseurs du nombre $B = \overline{1320}$ dans n'importe quelle base x où x est supérieur strictement à 3 ?
4. Vérifier que pour $x = 3$ le nombre $\overline{111}$ est divisible par 13. En déduire quelles sont toutes les bases x de $\mathbb{N} - \{0,\ 1\}$ pour lesquelles le nombre $\overline{111}$ est divisible par 13.

PROBLÈME

Soit E un espace affine de dimension 3, de repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ où O désigne un point de E et $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ une base de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ associé à E, noté $(\mathscr{E},\ +,\ .)$.
On définit l'application affine f de E vers E qui à tout point M de coordonnées $(x\,;\ y\,;\ z)$ par rapport à $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ associe le point M' de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ par rapport à $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ de telle sorte que

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' &=& x+6y+3z+12\\ y' &=& -3x-8y-3z-15\\ z' &=& 6x+12y+4z+18.\end{array}\right.$$

On note φ l'endomorphisme associé à f.

Partie A

1. Montrer qu'il existe une droite vectorielle $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$ dont on déterminera une base $\left(\overrightarrow{i_1}\right)$ et un plan vectoriel $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ dont on déterminera une base $\left(\overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}$ définis par

$$\mathcal{D} = \left\{\overrightarrow{v} \in \mathcal{E} / \exists k_1 \in \mathbb{R}^\star \left(\exists \overrightarrow{v} \in \mathcal{D}, \quad \varphi\left(\overrightarrow{v}\right) = k_1 \overrightarrow{v}\right)\right\}$$

$$\mathcal{G} = \left\{\overrightarrow{v} \in \mathcal{E} / \exists k_2 \in \mathbb{R}^\star \left(\exists \overrightarrow{v} \in \mathcal{G}, \quad \varphi\left(\overrightarrow{v}\right) = k_2 \overrightarrow{v}\right)\right\}$$

où k_1 et k_2 sont à déterminer et on vérifiera que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}$ sont deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathcal{E}$. On prendra dans la suite $\overrightarrow{i_1}$ de coordonnées $(1 ; -1 ; 2)$, $\overrightarrow{j_1}$ de coordonnées $(-2 ; 1 ; 0)$ et $\overrightarrow{k_1}$ de coordonnées $(1 ; 0 ; -1)$.

2. Préciser la nature de la restriction de φ à $\mathcal{D}$ et la nature de la restriction de φ à $\mathcal{G}$.
Exprimer analytiquement φ dans la base $\left(\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$ de $\mathcal{E}$ et préciser si φ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$.
Conclure alors si f est bijectif ou non.

3. Montrer qu'il existe un point A de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ 0)$ invariant par f. De tout ce qui précède déduire :
   a. l'ensemble (I) des points invariants par f ;
   b. les variétés de E pour lesquelles la restriction de f à ces variétés est une homothétie de rapport -2 ;
   c. une construction géométrique de l'image de tout point M par f, dans le plan contenant I et M.

Partie B

On suppose dans toute cette partie que E est affine euclidien et que la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ est orthonormée directe.

1. La droite vectorielle $\mathcal{D}$ est-elle orthogonale au plan vectoriel $\mathcal{G}$?
Montrer qu'il existe une droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta}$ de $\mathcal{G}$ orthogonale à $\mathcal{D}$ que l'on déterminera par un vecteur directeur $\overrightarrow{s}$ de norme égale à 1.
On appelle Δ la droite contenant le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{s}$.
On appelle $\overrightarrow{r}$ un vecteur unitaire de la droite (I).

2. Montrer que le plan P contenant (I) et (Δ) est stable par f. On appelle g la restriction de l'application f au plan P, et on repère ce plan P par rapport au repère orthonormé $\left(\text{A}, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}\right)$.
Préciser la matrice de φ' dans la base $\left(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}\right)$, φ' désignant l'endomorphisme associé à g.
On note $(\alpha\ ;\ \beta)$ les coordonnées d'un point M dans le repère $\left(\text{A}, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}\right)$. D'autre part, si l'on note z l'affixe d'un point M du plan complexe $\left(\text{A}, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}\right)$ associé à P, quelle est alors l'affixe z' de $g(M)$ en fonction de z et de $\overline{z}$ ($\overline{z}$ désignant le conjugué de z).

3. **a.** Déterminer dans le plan P l'ensemble (K) des points M de P tels que les vecteurs $\overrightarrow{\text{A}M}$ et $\overrightarrow{\text{A}M'}$ soient orthogonaux (M' désignant $g(M)$?
Préciser alors l'ensemble $(\text{K}') = g(\text{K})$.

b. Étudier l'image $\left(\mathcal{H}'\right)$ par g d'une hyperbole $\mathcal{H}$ du plan (Γ) ayant pour asymptotes les deux droites d'équations

$$\alpha = \beta\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \alpha = -\beta\sqrt{2}.$$

dans le repère $\left(\text{A}, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}\right)$.