Baccalauréat C Sport-études juin 1980

EXERCICE 1

Soit à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 + z^2(-1-2\mathrm{i}) + z(9\mathrm{i}-1) - 2(1+5\mathrm{i}) = 0.$$

1. Montrer que cette équation a, une solution réelle X que l'on déterminera.
2. Achever la résolution dans $\mathbb{C}$.
3. Montrer que les images des solutions, dans le plan complexe, sont les sommets d'un triangle isocèle.

EXERCICE 2

1. Démontrer que, pour tout réel x, on a

$$-1 < \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} < 1.$$

   Étudier l'application f de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]-1\,;\,+1[$ définie par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$$

   et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
2. Expliquer pourquoi f admet une application réciproque g.
   Pour y donné dans $]-1\,;\,+1[$, calculer $g(y)$.
3. Montrer que g est dérivable sur $]-1\,;\,+1[$, et calculer $g'(y)$.
4. Quelle est la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

PROBLÈME

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On note $\mathrm{I} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $\theta = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ et

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M} \mid A \neq \theta, \quad A^2 = A\}$$

Partie A

Soit A un élément de $\mathcal{A}$, et E l'ensemble des matrices de la forme $aA + bI$, a et b étant des réels.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$, +, .) et en donner une base.
2. Montrer que (E, +, $\times$) est un anneau commutatif unitaire.
3. Soit M un élément de E. Montrer que si $M = aA + bI$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad M^n = \left[(a+b)^n - b^n\right] A + b^n I.$$

Partie B

Soit P un plan affine euclidien, $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé de P, π le plan vectoriel associé à P. On prend A = $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

Pour tout couple $(a,\ b)$ de réels, on note $M_{a,\ b}$ la matrice $aA+bI$, et $f_{a,\ b}$ l'application affine de P qui laisse O invariant et dont l'endomorphisme associé $\varphi_{a,\ b}$ a pour matrice $M_{a,\ b}$ dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Définir analytiquement $f_{a,\ b}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   Quelle est la nature de $f_{a,\ b}$ lorsque $a = 0$?
2. Pour quelles valeurs du couple $(a,\ b)$ la matrice $M_{a,\ b}$ appartient-elle à $\mathscr{A}$? Préciser dans chacun des cas la nature et les éléments géométriques de $f_{a,\ b}$.
3. On considère une application $f_{a,\ 0}$ avec $a \neq 1$ et $a \neq 0$.
   Trouver
   a. l'ensemble de ses points invariants,
   b. l'image du plan P,
   c. l'image d'une droite de P (discuter).
4. Pour tout entier naturel non nul n, on note $f^n_{a,\ 0}$ la composée de n applications égales à $f_{a,\ 0}$. Montrer que v est la composée de deux applications affines simples. Étant donné un point B quelconque de P, construire les images $\text{B}_1,\ \text{B}_2,\ \text{B}_3$ de B par $f_{\frac{1}{2},\ 0}$, $f^2_{\frac{1}{2},\ 0}$, $f^3_{\frac{1}{2},\ 0}$.

Partie C

On considère la famille des courbes (Γ_m) d'équations

$$(m+1)x^2 - y^2 + (m-3)x - 1 = 0$$

dans le repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Discuter, suivant les valeurs de m dans $\mathbb{R}$, la nature de (Γ_m).
   Construire (Γ_{-1}) et (Γ_3) en précisant leurs axes de symétrie, sommets, foyers, asymptotes éventuelles.
2. Déterminer l'équation dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de l'image (H) de (Γ_3) par l'application $f_{1,\ 2}$ définie dans la partie B, et mettre cette équation sous la forme $x = F(y)$.
3. Étudier la fonction F et en déduire le tracé de (H).
4. Soit (D) l'asymptote oblique de (H) et $\vec{v}$ le vecteur directeur de (D) qui a pour abscisse 1.
   Déterminer l'équation de (H) dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{v}\right)$. En déduire la nature de (H).