Baccalauréat C Reims juin 1980

EXERCICE 1 **POINTS**

On donne dans un espace affine E deux points distincts A et B.

1. Déterminer la condition sur le couple de réels $(\alpha,\ \beta)$ pour que pour tout point M de E, il existe un unique point M' de E tel que

$$\alpha\overrightarrow{M'\text{A}} + \beta\overrightarrow{M'\text{B}} + 2\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{0}.$$

2. On suppose dans toute la suite de l'exercice, réalisée la condition trouvée à la question 1 et on désigne par f l'application de E dans E qui à M associe M'.

a. Déterminer, suivant les valeurs du couple $(\alpha,\ \beta)$, l'ensemble des points invariants par f.

b. On suppose $\alpha+\beta = 0$. Exprimer, pour tout M de E, le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ et du réel α ; en déduire la nature de f.

c. On suppose $\alpha+\beta \neq 0$. Montrer que f est une homothétie ponctuelle dont on déterminera le centre et le rapport.

EXERCICE 2 **POINTS**

1. Soit V un plan vectoriel muni d'une base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ et soit f l'endomorphisme de V de matrice $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 3\\ -\frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}$ dans $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

a. Déterminer un couple $\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$ de vecteurs non nuls de V tels que

$$f\left(\overrightarrow{I}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{I} \quad \text{et} \quad f\left(\overrightarrow{J}\right) = \overrightarrow{J}.$$

Montrer que $\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$ est une base de V et écrire la matrice M de f dans $\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$.

b. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^{\star}$, la matrice M^n.

c. Soit x, y, X, Y des réels tels que

$$x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} = X\overrightarrow{I} + Y\overrightarrow{J}.$$

Calculer chacun des nombres x et y en fonction de X et Y, puis chacun des nombres X et Y en fonction de x et y.

2. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ construites par récurrence sur $\mathbb{N}$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 &=& 1\\ y_0 &=& 1\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \forall k\in\mathbb{N}\left\{\begin{array}{lcl} x_{k+1} &=& -\frac{1}{2}x_k + 3y_k\\ y_{k+1} &=& -\frac{1}{2}x_k + 2y_k\end{array}\right.$$

a. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\overrightarrow{u_n}$ le vecteur $x_n\overrightarrow{\imath} + +y_n\overrightarrow{\jmath}$.
Exprimer, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\overrightarrow{u_{k+1}}$ en fonction de $\overrightarrow{u_k}$ à l'aide de f, puis, pour tout $n\in\mathbb{N}^{\star}$, $\overrightarrow{u_n}$ en fonction de $\overrightarrow{u_0}$ à l'aide de f^n où $f^n = f\circ f\circ\cdot\circ f$ (n fois).

b. Calculer pour tout $n\in\mathbb{N}$, x_n et y_n en fonction de n.

PROBLÈME **POINTS**

On considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^3}{x^2+3x+3} \end{array}$$

1. **a.** Étudier f et construire sa courbe représentative (C) dans un plan (P) rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

   On montrera que (C) admet une asymptote dont on donnera une équation.

   b. Montrer que (C) possède un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.

2. **a.** Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Construire dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ la courbe (C') de la fonction réciproque f^{-1}.

   b. Étudier la dérivabilité de f^{-1}. Préciser en particulier le nombre dérivé de f^{-1} en -1.

3. **a.** Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que

$$0 < \left|f(x) - x + 3\right| < 1.$$

   b. Trouver les points de (C) dont les coordonnées sont toutes deux des entiers relatifs.

   c. Soit M un point de (C) dont l'ordonnée est un entier k strictement positif.

   Montrer que l'abscisse x_0 de M est un nombre irrationnel.

   (On pourra montrer qu'il est impossible de trouver deux entiers p et q premiers entre eux tels que $x_0 = \frac{p}{q}$).

4. **a.** Soit λ un nombre réel supérieur ou égal à -1.

   Calculer l'aire $S(\lambda)$ de la partie du plan (P) limitée par (C) et les droites d'équations respectives $y = x - 3$, $x = 0$ et $x = \lambda$.

   b. Déterminer λ positif tel que $S(\lambda) = S(-1)$.

   c. Calculer l'aire de la partie E du plan (P) définie par

$$E = \left\{M(x\ ;\ y) / -1 \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f^{-1}(x) \leqslant y \leqslant f(x)\right\}.$$