Baccalauréat C Amiens–Rouen juin 1983

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \cos 3x \cdot \cos^3 x.$$

1. Étudier les variations de la fonction f et construire se courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. (On prendra 3 cm comme unité).
2. Montrer que, quel que soit le réel x, on a :

$$f(x) = a\cos 6x + b\cos 4x + c\cos 2x + d,$$

   où $a,\ b,\ c,\ d$ sont quatre réels que l'on déterminera.
3. Calculer, en cm^2, l'aire de l'ensemble E limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{6}$.

EXERCICE 2

Les suites $(U) = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels sont définies par :

$$\left\{\begin{array}{l} U_0 = 5 \\ U_1 = 31 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+2} = 12U_{n+1} - 35U_n \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} V_0 = -1 \\ V_1 = -11 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+2} = 12V_{n+1} - 35V_n \end{array}\right.$$

Les suites $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = U_n + V_n \quad \text{et} \quad Y_n = U_n - V_n.$$

1. Calculer X_0 et X_1. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que la suite X est une suite géométrique de raison 5.
2. Montrer de même que la suite Y est une suite géométrique.
3. Calculer X_n et Y_n en fonction de n ; en déduire le calcul de U_n et V_n en fonction de n.
4. Le 3. a montré : $\forall x \in \mathbb{N},\ U_n = 2\times 5^n + 3\times 7^n$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$; on pose $d_n =$ P. G. C. D. $(U_n,\ U_{n+1})$.
   Calculer $U_{n+1} - 5U_n$ et $7U_n - U_{n+1}$; utiliser les résultats de ce calcul pour montrer que d_n est égal à 1 ou à 2.
   U_n et U_{n+1} sont-ils premiers entre eux ?

PROBLÈME

Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Si M et M' appartiennent à $\mathscr{M}$ et si λ est un réel, on note :

- $M + M'$ la somme des matrices M et M',
- $M \times M'$ le produit des matrices M et M' ;
- $\lambda \cdot M$ le produit de la matrice M par le réel λ.

On rappelle que $(\mathscr{M},\ +,\ .)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathscr{M},\ +,\ \times)$ est un anneau unitaire.
On pose $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix}1 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}$.

Partie A On désigne par E l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix}a+b & 3b\\ b & b-a\end{pmatrix},$$

où $(a,\ b)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $(E,\ +,\ .)$ est un espace vectoriel dont $(I,\ J)$ est une base.
2. Calculer J^2.
   Montrer que $(E,\ +,\ \times)$ est un anneau commutatif unitaire.
3. **a.** Trouver les éléments de E tels que $M^2 = M$.
   b. Trouver les éléments de E tels que $M^2 = I$.
4. Montrer que E est l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}$ telles que $M \times J = J \times M$.

Partie B

Soit $\mathscr{P}$ un plan vectoriel de base ij et les vecteurs $\overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{e}_2 = 3\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$. Pour tout couple $(a,\ b)$ de réels, on note $\varphi_{a,\ b}$ l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ de matrice

$$M_{a,\ b} = \begin{pmatrix}a+b & 3b\\ b & b-a\end{pmatrix},$$

dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ de $\varphi_{a,\ b}(\overrightarrow{e_1})$ et $\varphi_{a,\ b}(\overrightarrow{e_2})$; comparer ces deux vecteurs à $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ respectivement.
2. Déterminer tous les couples $(a,\ b)$ de réels pour lesquels $\varphi_{a,\ b}$ est à la fois non nul et non bijectif ; donner alors une base de son image et une base de son noyau.
3. Déterminer les couples $(a,\ b)$ de réels pour lesquels :
   a. $\varphi_{a,\ b}$ est une projection sur une droite vectorielle ; caractériser cette projection ;
   b. $\varphi_{a,\ b}$ est une symétrie par rapport à une droite vectorielle ; caractériser cette symétrie.

Partie C

Soit P un plan affine associé à $\mathscr{P}$ et rapporté au repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. On considère l'application affine f d'endomorphisme associé $\varphi_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}}$ et lissant le point $A(0\ ;\ 1)$ invariant. Donner la nature de f et ses éléments caractéristiques.
2. Soit g l'application de P dans P qui au point $M(x\ ;\ y)$ associe le point $M'(x'\ ;\ y')$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}y + 3\\ y' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y + 1\end{array}\right.$$

   a. Montrer que g est une application affine de P sans point invariant et dont l'endomorphisme associé est involutif.

b. Montrer que g est la composée commutative d'une symétrie affine s et d'une translation t dont le vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{e_2}$ Donner les éléments caractéristiques de s et t.

3. Déterminer les images du plan P par $g \circ f$ et $f \circ g$.

Partie D

Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(x) = -x + \frac{4}{3}\log\left(3\mathrm{e}^{x} + 1\right).$$

(log désigne le logarithme népérien.)

1. Montrer que, pour tout x réel, $h(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{4}{3}\log\left(3 + \mathrm{e}^{-x}\right)$.

Étudier les variations de h.

2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ représentative de h admet deux asymptotes que l'on précisera. La courbe $\mathscr{C}$ coupe-t-elle ses asymptotes ?

Tracer $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ (unités : 1 cm).

Tracer la tangente à $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse nulle.

3. Construire les transformés des asymptotes à $\mathscr{C}$, du point B et de la tangente à $\mathscr{C}$ en B par l'application g (définie à la question C. 2.). Utiliser ces résultats pour effectuer sur le graphique un tracé approximatif de l'image de $\mathscr{C}$ par g.