∽ Baccalauréat C Besançon juin 1983 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Tous les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

1. a et b étant deux réels quelconques, on note $M(a,\ b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 2b & -a\end{pmatrix}$.

Soit E l'ensemble des matrices $M(a,\ b)$.

a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2. Trouver une base de E et en déduire la dimension de E.

b. Montrer que E est un corps commutatif pour l'addition et la multiplication des matrices.

2. Soit φ l'application de E dans le corps des nombres complexes, $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(M(a,\ b)) = a + \mathrm{i}\sqrt{2}b.$$

a. Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b. Montrer que φ est un isomorphisme de corps.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Un plongeur de restaurant lave 30 verres, 10 de chaque type A, B, C. Au cours de la vaisselle, deux verres sont cassés. On admet que le hasard seul est responsable de la casse. On suppose ainsi qu ?il y a équiprobabilité des évènements élémentaires.

1. Construire l ?espace probabilisé correspondant à la situation.

2. **a.** Quelle est la probabilité que les deux verres cassés soient du même type ?

b. Quelle est la probabilité de casser au moins un verre de type A ?

c. Quelle est la probabilité de casser un verre de type B et un verre de type C ?

3. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de verres de type A cassés.

a. Quelle est la loi de probabilité de X ?

b. Trouver l ?espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ et la variance $V(X)$ de cette variable aléatoire.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

Le plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Le vecteur $\vec{\mathrm{I}}$ étant l'image du vecteur $\vec{\imath}$ dans la rotation vectorielle d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radians, on appelle $\left(\mathrm{O},\ \vec{\mathrm{I}},\ \vec{\mathrm{J}}\right)$ un nouveau repère orthonormé direct.
Le point M du plan, de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ a pour coordonnées $(X\ ;\ Y)$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\mathrm{I}},\ \vec{\mathrm{J}}\right)$.

1. Calculer x et y en fonction de X et Y, puis X et Y en fonction de x et y.

2. A est un point variable de la demi-droite $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\text{I}}\right)$ et B un point variable de la demi-droite $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\text{J}}\right)$ tels que l'aire du triangle (OAB) soit égale à 1.
   Le point M, milieu du bi-point (A, B) décrit alors une courbe (Γ).
   a. Donner l'équation de (Γ) dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\text{I}},\ \overrightarrow{\text{J}}\right)$
   b. Donner l'équation de (Γ) dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   c. Montrer que M décrit une partie de conique dont on précisera la nature.
3. Soit M_0 un point de (Γ). Montrer analytiquement que la tangente à (Γ) au point M_0 coupe les deux asymptotes de (Γ) en deux points A_0 et B_0 tels que M_0 soit le milieu du segment A_0B_0. Vérifier que l'aire du triangle $\text{O}A_0B_0$ est égale à 1.

Partie B

Pour toutes les fonctions considérées, on prend à chaque fois le plus grand ensemble de définition possible dans $\mathbb{R}$.
On pose :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé $\left(\Omega,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque h dont on déterminera le domaine de définition.
   Donner l'expression de $h(x)$ et tracer la courbe représentative de h dans le repère $\left(\Omega,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
3. Calculer les fonctions dérivées f' et g' des fonctions f et g. Effectuer $f'(x) \times g'[f(x)]$, x étant un réel. Expliquer le résultat obtenu.

Partie C

1. Montrer que la fonction F définie par

$$F(x) = \sqrt{1+x^2}$$

   est une primitive de la fonction f définie à la partie B.
   En déduire l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de la portion de plan délimitée par l'axe des ordonnées, la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f, la droite d'équation $y = 1$ et la droite d'équation $x = \lambda$ dans le repère $\left(\Omega,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, λ étant un réel positif donné.
   Cette aire a-t-elle une limite quand λ tend vers $+\infty$? Si oui, laquelle ?
2. Trouver une primitive G de la fonction g définie à la partie B.
   Quelle est l'aire de la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de g et la droite d'équation $x = \mu$ dans le repère $\left(\Omega,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, μ étant un réel donné compris entre 0 et 1.
   Cette aire a-t-elle une limite quand μ tend vers 1 par valeurs inférieures ? Comparer avec la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$. Expliquer le résultat obtenu.
3. m étant un réel strictement positif, on définit la fonction f_m par :

$$f_m(x) = \frac{mx}{\sqrt{x^2+m^2}}.$$

   Trouver la primitive F_m de f_m prenant la valeur m^2 en zéro.
   Montrer que la courbe représentative de F_m dans un repère orthonormé est une partie d'une conique dont on précisera la nature, le centre, les sommets, les asymptotes, les foyers, les directrices et l'excentricité.