Baccalauréat C Bordeaux juin 1983

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Étudier la fonction numérique f :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array}\right.$$

2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$g(x) = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}\,\mathrm{d}t.$$

   On ne cherchera pas à à calculer cette intégrale. Démontrer que g est définie et dérivable sur $[1~;~+\infty[$. Calculer $g'(x)$.

3. Soit $h = g \circ f$. Démontrer que h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $h'(x)$ puis $h(x)$.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Déterminer les couples $(a~;~b)$ d'entiers naturels non nuls tels que

$$\left\{\begin{array}{lcl} a + 2b & = & 42 \\ \text{P. P. C. M}(a~;~b) & = & 20. \end{array}\right.$$

PROBLÈME **13 POINTS**

Partie A

On désigne par E un plan vectoriel, et par $B = \left(\overrightarrow{\imath}~,~\overrightarrow{\imath}\right)$ une base de E.

À tout couple $(a~;~b)$ de réels, on associe l'endomorphisme $F_{a,~b}$ de E dont la matrice dans la base B est

$$M_{a,~b} = \begin{pmatrix} a-2 & a-1 \\ b+1 & b \end{pmatrix}.$$

On désigne par I l'application identique de E.

1. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que Fa,b soit bijective est a + b , 1.

2. λ étant un réel, démontrer que l'endomorphisme $\left(F_{a,~b} - \lambda I\right)$ n'est pas une bijection si et seulement si λ est solution de l'équation

$$\lambda^2 - (a+b-2)\lambda - (a+b-1)\lambda = 0.$$

   Rechercher pour chacune des solutions de cette équation, le noyau de $\left(F_{a,~b} - \lambda I\right)$, et en donner une base.

3. Dans quels cas $F_{a,~b}$ est-elle involutive ? Caractériser cette involution.

Partie B

On suppose dans cette partie que a est un réel non nul et différent de 1 et que b est nul.

1. On pose $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{v_1} = (a-1)\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$.
   Montrer que $\left(\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}\right)$ est une base B' de E.
   Quelle est la matrice de l'endomorphisme $F_{a,\,0}$ dans la base B' ?
2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $(F_{a,0})^{n+1} = F_{a,0}\circ(F_{a,0})^n$ et $(F_{a,0})^1 = F_{a,0}$.
   Déterminer la matrice de l'endomorphisme $(F_{a,0})^n$ dans la base B'.
   En déduire $(F_{a,0})^n\left(\overrightarrow{\imath}\right)$ et $(F_{a,0})^n\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$ puis $\left(M_{a,0}\right)^n$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de u_0 et de u_1 et :

$$\forall n \in N,\quad u_{n+2} = (a-2)u_{n+1} + (a-1)u_n.$$

   On pose pour tout entier naturel n : $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad V_{n+1} = M_{a,0}V_n$.
   Utiliser la question précédente pour calculer V_n en fonction de n et de V_0, puis u_{n+1} en fonction de n, u_0 et u_1, n étant un entier naturel non nul.

Partie C

On désigne par $\mathscr{E}$ un plan affine de plan vectoriel associé E, dont un repère cartésien est $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. a étant un réel, on appelle f_a l'application qui à tout point M de coordonnées $(x\,;\ y)$ associe la point M' dont les coordonnées $\left(x'\,;\ y'\right)$ sont données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& 2(a-2)x+2(a-1)y+2\\ y' &=& 2(3-a)x+2(2-a)y-1.\end{array}\right.$$

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f_a.
2. Montrer que f_a est la composée d ?une homothétie et d ?une symétrie affine dont la direction est indépendante du réel a.
3. Dans cette question on prend $a = 1$. Soit Ω le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\,;\,0\right)$ et A le point de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,-\dfrac{2}{3}\right)$.
   On définit la suite de points $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Omega_0 &=& \Omega\\ \Omega_{n+1} &=& f_1(\Omega_n),\quad \forall n \in \mathbb{N}.\end{array}\right.$$

   Dessiner les triangles $\mathrm{A}\Omega\Omega_1$ et $\mathrm{A}\Omega_2\Omega_3$.
   À quelle condition simple le triangle $\mathrm{A}\Omega\Omega_1$ a-t-il pour image le triangle $\mathrm{A}\Omega_{2n}\Omega_{2n+2}$?