Baccalauréat C Caen juin 1983

EXERCICE 1 **3,5 POINTS**

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Une urne contient $5k$ boules blanches et $3k$ boules rouges.

1. On tire simultanément trois boules de l'urne. On admet que tous les tirages sont équiprobables. On note $p(k)$ la probabilité de l'évènement E : « tirer plus de boules rouges que de boules blanches ». Calculer $p(1)$, puis $p(k)$.
   Étudier la limite de $p(k)$ quand k tend vers $+\infty$.
2. On tire successivement trois boules de l'urne en notant chaque fois la couleur de la boule, puis en la remettant dans l'urne. On admet l'équiprobabilité des tirages. On note $p'(k)$ la probabilité de l'évènement E' : « tirer plus de boules rouges que de boules blanches ». Montrer que $p'(k)$ est indépendant de k et vérifier que

$$p'(k) = \lim_{k \to +\infty} p(k).$$

EXERCICE 2 **3,5 POINTS**

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note E l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que :

$$x^2 + 4y^2 - 2|x| - 3 = 0.$$

Étudier et construire E. En particulier, préciser les axes de symétrie, les points où les tangentes sont parallèles aux axes et les demi-tangentes aux points d'abscisse nulle.

PROBLÈME **3,5 POINTS**

Soit F l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. On rappelle que F, muni de l'addition et de la multiplication d'une fonction par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Si f est un élément de F, on note f' la dérivée de f et f'' la dérivée seconde de f.

Partie A

Soit f_1, f_2, f_3 les éléments de F définis par :

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f_2(x) = \cos \pi x, \quad f_3(x) = \sin \pi x.$$

Soit E l'ensemble des applications f telles que :

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3,$$

(a_1, a_2, a_3) étant un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$.

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de F et que $B = \left(f_1, f_2, f_3\right)$ est une base de E.

2. Soit φ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (f,\ g) \in E \times E, \quad \varphi(f,\ g) = \int_0^2 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démontrer que φ est un produit scalaire sur E pour lequel B est une base orthonormée.

(On pourra calculer d'abord $\varphi(f,\ g)$ en fonction des coordonnées de f et de g dans la base B.)

Partie B

Dans le suite du problème, E, muni du produit scalaire défini dans la partie A, est un espace vectoriel euclidien que l'on oriente de manière que la base B soit directe.
À tout élément f de E, on associe l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right). \qquad (1)$$

1. Montrer que g appartient à E et que l'application

$$\begin{array}{rcl} r : E & \to & E \\ f & \longmapsto & g \text{ dèéfinie par (1)} \end{array}$$

est une rotation vectorielle de E dont on précisera l'axe et dont on déterminera l'angle après avoir orienté cet axe.

2. **a.** Vérifier que $r \circ r = s$, où s est l'endomorphisme de E : $f \longmapsto s(f)$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, \quad s(f)(x) = f(x+1)$.

b. Préciser la nature de l'endomorphisme s. Le caractériser simplement.

c. Démontrer que :

$$\forall f \in E, \quad s(f) = f + \frac{2}{\pi^2} f''.$$

3. Résoudre dans E l'équation d'inconnue f, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \frac{2}{\pi^2} f'' = 1 + \ \cos \pi x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \pi x.$$

Partie C

Soit p l'application :

$$\begin{array}{rcl} p : [0\ ;\ 2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x - x^2. \end{array}$$

Pour tout f de E, on pose $I(f) = \displaystyle\int_0^2 [p(x) - f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.
On se propose de déterminer une fonction γ de E telle que :

$$\forall f \in E, \quad I(\gamma) \leqslant I(f) \qquad (2)$$

et de calculer $I(\gamma)$.
On pose $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$ où a_1, a_2, a_3 sont trois réels.

1. Déterminer, en utilisant le A 2., $\displaystyle\int_0^2 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$ en fonction de a_1, a_2, a_3.

2. Pour tout élément i de $\{1,\ 2,\ 3\}$, on pose :

$$\alpha_i = \int_0^2 p(x) f_i(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. Montrer, sans calculer α_1, α_2, α_3, que :

$$I(f) = \int_0^2 [p(x)]^2\,\mathrm{d}x + (a_1-\alpha_1)^2 + (a_2-\alpha_2)^2 + (a_3-\alpha_3)^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2.$$

b. Comment faut-il choisir a_1, a_2, a_3 pour que $I(f)$ soit le plus petit possible ?

3. **a.** En déduire qu'il existe une fonction γ et une seule satisfaisant à la condition (2) et donner l'expression de $\gamma(x)$. Calculer $I(\gamma)$.

b. Tracer sur le même graphique les courbes représentatives de p et γ sur l'intervalle $[0\,;\,2]$. (Unité : 5 cm.)