

## ∞ Baccalauréat C Caen septembre 1983 ∞

### EXERCICE 1

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :

$$z^3 - (3 + 2i)z^2 + (2 + 4i)z = 0.$$

2.  $\mathcal{P}$  étant un plan orienté rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , on appelle A, B, C les points de  $\mathcal{P}$  dont les affixes sont les racines de l'équation. Montrer qu'il existe un point D, d'abscisse nulle, distinct des points A, B, C, tel que D appartienne au cercle passant par A, B, C. Déterminer l'ordonnée de D.

### EXERCICE 2

Calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, dx, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx.$$

### PROBLÈME

Soit  $\mathcal{P}$  le plan rapporté au repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $\mathcal{V}$  le plan vectoriel associé.

#### Partie A

Soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathcal{V}$  de matrice dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que  $\varphi$  est une symétrie vectorielle dont on déterminera les éléments.

#### Partie B

Soit  $f$  la fonction numérique de variable réelle définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{|4x^2 - 16x + 7|}.$$

Soit  $\mathcal{C}$  la représentation graphique de  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1.
  - a. Montrer que la droite d'équation  $x = 2$  est un axe de symétrie de C. Étudier les variations de f Déterminer les asymptotes de C. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .
  - b. Soit  $\mathcal{C}'$  l'image de  $\mathcal{C}$  dans la symétrie orthogonale d'axe  $(O; \vec{i})$ . Tracer  $\mathcal{C}'$ . Montrer que  $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$  est la réunion d'une ellipse E et d'une hyperbole H; on donnera les coordonnées du centre et des sommets de chacune des deux coniques ainsi que celles de leurs foyers et les équations des directrices associées.
2. Soit  $s$  l'application affine de  $\mathcal{P}$  laissant invariant le point  $\Omega$  de coordonnées  $(2; 0)$  et dont l'endomorphisme associé est  $\varphi$  (étudié dans la partie A). Étudier  $s(E)$  et  $s(H)$ . Tracer  $s(H)$ .

**Partie C**

Sur l'intervalle  $I = ]1 ; +\infty[$  de  $\mathbb{R}$ , on définit la fonction  $u$  de la variable  $t$  par

$$\forall t \in I, \quad u(t) = e^{t-1} + \ln(t-1) \quad (\ln \text{ désigne le logarithme népérien}).$$

1.
  - a. Étudier la variation de  $u$ . Montrer que  $u$  est une bijection de  $I$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - b. Pour tout  $t$  de  $I$ , calculer  $u''(t)$ , où  $u''$  est la dérivée seconde de  $u$ .  
Montrer que  $u''$  est une bijection de  $I$  sur  $\mathbb{R}$  et qu'elle s'annule pour  $t_0 \in \left] \frac{3}{2} ; 2 \right[$ .
2. Dans le plan  $\mathcal{P}$  rapporté au repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère le mouvement d'un point  $M$  dont les coordonnées sont définies par

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} 3x &= 2 + \frac{3}{2} \cos[u(t)] \\ y &= \frac{3}{2} \sin[u(t)] \end{cases} \quad (t \text{ désigne le temps}).$$

- a. Déterminer la trajectoire de  $M$  et la tracer.
- b. Déterminer le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V(t)}$  et le vecteur accélération  $\overrightarrow{\Gamma(t)}$  de  $M$  à l'instant  $t$ .  
Étudier la nature du mouvement de  $M$  sur sa trajectoire.