

❧ Baccalauréat C Clermont-Ferrand juin 1983 ❧

EXERCICE 1

4 POINTS

On considère les trois entiers naturels a , b et c qui, dans le système de numération à base n , s'écrivent :

$$a = 1983, \quad b = 11, \quad c = 12.$$

1. Prouver que P. G. C. $D(a, b) = \text{P. G. C. } D(b, 3)$.
En déduire les différentes valeurs possibles de P. G. C. $D(a, b)$.
2. Pour quelles valeurs de l'entier n les deux nombres a et b sont-ils premiers entre eux? En dresser la liste pour n strictement inférieur à vingt-cinq.
3. Vérifier que $a = (n+2)(n^2 + 7n - 6) + 15$.
Par un raisonnement analogue à celui du 1, trouver les différentes valeurs possibles de P. G. C. $D(a, c)$.
4. Pour quelles valeurs de n a-t-on P. G. C. $D(a, b) = \text{P. G. C. } D(a, c)$?
En dresser la liste pour n strictement inférieur à 25.

EXERCICE 2

4 POINTS

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(x) &= x(\log|x|)^2, \quad \text{pour } x \neq 0. \end{cases}$$

1. Étudier les variations de l'application f . On précisera en particulier la continuité et la dérivabilité en 0.
Tracer la courbe représentative de f dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, en prenant 4 cm pour unité de longueur.
2. On désigne par $I(a)$ l'intégrale

$$\int_a^{\frac{1}{e}} f(x) dx \quad \text{pour } a > 0.$$

Calculer $I(a)$. Calculer la limite de $I(a)$ lorsque a tend vers zéro.

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

1. Dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé \mathcal{R} on considère la courbe C d'équation

$$2x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

Déterminer la nature de cette courbe et la tracer.

2. Pour chaque nombre réel t , on désigne par $M(t)$ le point du plan, dont les coordonnées dans le repère \mathcal{R} sont

$$x = \cos^2 t, \quad y = \sqrt{2} \sin t \cos t.$$

Montrer que le point $M(t)$ appartient à la courbe C quel que soit t . Pour chaque point A de la courbe C , montrer qu'il existe un nombre réel t unique tel que l'on ait

$$A = M(t) \quad \text{et} \quad 0 \leq t < \pi.$$

Déterminer les coordonnées des points $M(t)$ qui correspondent aux valeurs suivantes de t :

$$0, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{12}$$

Partie B

Dans toute la suite du problème, on désigne par E un espace vectoriel euclidien orienté et par $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de E ; on désigne par a et b deux nombres réels quelconques et on pose

$$\vec{u} = 2a\vec{i} - b\vec{j} - b\vec{k}.$$

1. On désigne par D le sous-espace vectoriel de E engendré par \vec{u} . Soit T le sous-espace vectoriel de E orthogonal à D . Quelles sont les dimensions de D et de T suivant les valeurs de a et b ?

Lorsque T est un plan vectoriel, écrire son équation cartésienne.

2. On désigne par f l'endomorphisme de E défini analytiquement par

$$\begin{cases} x' &= (1-2a)x + by + bz \\ y' &= bx + ay + (a-1)z \\ z' &= bx + (a-1)y + az. \end{cases}$$

L'endomorphisme f fait ainsi correspondre au vecteur de coordonnées $(x; y; z)$ le vecteur de coordonnées $(x'; y'; z')$.

Déterminer l'endomorphisme $f \circ f$ de E par son expression analytique. En déduire que l'endomorphisme f est une involution si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

$$(*) \quad 2a^2 + b^2 - 2a = 0.$$

3. On suppose désormais dans toute la suite du problème que la condition (*) ci-dessus est satisfaite.

L'endomorphisme f est-il une isométrie?

Déterminer les vecteurs invariants par f . Déterminer $f(\hat{u})$. Caractériser f .

4. On considère l'endomorphisme s de E défini analytiquement par

$$\begin{cases} x' &= -x, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{cases}$$

On pose $g = f \circ s$.

- a. Quelle est la nature de l'endomorphisme s ?

Que peut-on dire, sans calcul, de l'endomorphisme g ?

- b. Soit F la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{j} - \vec{k}$. Soit U le plan vectoriel orthogonal à la droite vectorielle F .

Déterminer une base orthonormée du plan vectoriel U de la forme (\vec{i}, \vec{v})

où \vec{i} est le premier vecteur de la base \mathcal{B} de E .

- c. Exprimer $g(\vec{v})$ en fonction de \vec{u} et \vec{v} .
En déduire la caractérisation complète de g .
- d. Appliquer ce qui précède au cas particulier suivant

$$a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad b = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$