Baccalauréat C Dakar septembre 1983

EXERCICE 1

Le tableau suivant donne les coûts de production d'une entreprise en fonction du nombre d'unités produites.

Nombre d'unités produites X_i	Coût global de production Y_i
1 000	14 000 000
2 000	20 000 000
3 000	23 000 000
4 000	30 000 000
5 000	37 000 000
6 000	41 000 000
7 000	47 000 000
8 000	51 000 000
9 000	54 000 000
10 000	60 000 000
11 000	63 000 000

1. Construire le nuage de points correspondant.
2. Déterminer les équations des droites de régression.

EXERCICE 2

Dans un plan orienté, rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on considère les points A et B de coordonnées respectives $(6\,;0)$, $(3\,;\sqrt{3})$ ainsi que la rotation R_1 de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et la rotation R_2 de centre B, d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
Un point M quelconque du plan a pour coordonnées $(x\,;\,y)$. Donner en fonction de x et y les coordonnées de $R_1(M)$ et celles de $R_2(M)$.

1. Montrer que l'application composée $R_1 \circ R_2$ est une rotation dont on déterminera le centre ω et l'angle.
2. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par A et B. Montrer qu'il existe deux symétries orthogonales s_1 et s_2 par rapport à des droites D_1 et D_2 telles que $R_1 = s_1 \circ s$ et $R_2 = s \circ s_2$. En déduire que $R_1 \circ R_2 = s_1 \circ s_2$. Montrer que D_1 et D_2 sont sécantes en ω.

   N.B. : Le candidat peut, s'il le désire, utiliser des nombres complexes pour traiter la question 1.

PROBLÈME

Partie A

Soit $\mathscr{P}$ un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ et C la courbe représentative de l'application numérique :

$$f : \left\{\begin{array}{lcl} \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{\text{tg}\,x} \end{array}\right.$$

1. Étudier l'application f.
   f est-elle dérivable en 0 ? (On rappelle que $\lim \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$).
   Montrer que

$$\forall x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[,\quad f'(x) = \frac{1 + [f(x)]^2}{2f(x)}.$$

   Tracer la courbe C.
2. Montrer que f admet une application réciproque g définie sur $\mathbb{R}_+$.
   Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\quad g'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$$

   Déterminer $g(0)$ et $g(1)$.
   Tracer la courbe Γ_1 représentant g.

Partie B

On considère la fonction numérique G de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = 2\int_0^x \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad G'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$$

   Préciser $G(0)$. Quelle est la restriction de G à $\mathbb{R}_+$?
   En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.
2. Étudier la parité de G.
   Tracer la courbe représentative Γ de la fonction G.
3. **a.** Soit $q \in \mathbb{R}^\star - \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ en fonction de q et n.
   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-t^4\right)^k$ et montrer que

$$\frac{t}{1+t^4} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{4k+1} + (-1)^{n+1}\frac{t^{4n+5}}{1+t^4},$$

   en déduire que

$$\int_0^1 \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = S_n + R_n$$

   avec

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{4^{k+2}} \quad\text{et}\quad R_n = (-1)^{n+1} + \int_0^1 \frac{t^{4n+5}}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

   b. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\quad \dfrac{t^{4n+5}}{1+t^4} \leqslant t^{4n+5}$ et que $|R_n| \leqslant \dfrac{1}{4n+6}$; en déduire que $\dfrac{\pi}{8} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Partie C

1. Montrer que, pour $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2(x)}}$ en déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\cos(g(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{et} \quad \sin(g(t)) = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}.$$

2. On considère le mouvement d'un point mobile M de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées à l'instant t ($t \in \mathbb{R}_+$) sont

$$\left\{\begin{array}{l c l} x(t) & = & \cos(g(t)) \\ y(t) & = & \sin(g(t)) \end{array}\right.$$

Déterminer la trajectoire T de M et tracer T.

Préciser le sens du mouvement de M sur sa trajectoire.

3. Exprimer les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{v(t)}$ et du vecteur accélération $\overrightarrow{\gamma(t)}$ à l'instant t en fonction de $g(t)$, $g'(t)$ et $g''(t)$.

4. Montrer que le produit scalaire des vecteurs vitesse et accélération est :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \overrightarrow{v(t)} \cdot \overrightarrow{\gamma(t)} = g'(t) \cdot g''(t).$$

Sur quels intervalles le mouvement est-il accéléré (respectivement retardé) ?