

Baccalauréat C Dijon juin 1983

EXERCICE 1

4 POINTS

\mathcal{E} est un espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note E l'espace vectoriel associé à \mathcal{E} .

Soit f l'application affine de \mathcal{E} , qui à tout point M de coordonnées $(x; y; z)$ associe le point M' dont les coordonnées $(x'; y'; z')$ sont :

$$\begin{cases} x' &= x + a \quad (a \text{ étant un réel quelconque}) \\ y' &= \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z + 1 \\ z' &= \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z - 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

1. Montrer que l'endomorphisme φ associé à f est une rotation vectorielle dont on précisera l'axe et l'angle.
2. Discuter, suivant les valeurs de a , la nature de f ; on précisera dans chaque cas les éléments caractéristiques de f .

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit dans un plan affine euclidien P un triangle équilatéral ABC dont la mesure d'un côté est a .

On désigne par O le milieu du bipoint (B, C) , par G le centre de gravité du triangle ABC et par O' le symétrique de G par rapport à O .

1. Déterminer le barycentre des points G et O respectivement affectés des coefficients -3 et 2 .

Quel est l'ensemble E des points de P tels que :

$$\| -3\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{MO} \| = \| \overrightarrow{MO'} \|$$

2. Déterminer l'ensemble L des points de P tels que :

$$MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = k \quad (k \text{ étant un réel quelconque})$$

Comment faut-il choisir k pour que cet ensemble contienne le point G ?

3. Démontrer que, quel que soit M appartenant à P :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + a^2$$

Déterminer l'ensemble r des points M tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$$

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

On considère la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = \sqrt{\left| \frac{x-1}{x} \right|}.$$

1. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . On prendra pour unité 2 cm. préciser en particulier la tangente à C au point d'abscisse 1.
2. Démontrer que l'application $f_1 :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \longmapsto f(x)$$
est une bijection et déterminer l'application réciproque f_1^{-1} .
Sur une nouvelle figure, représenter f_1 et f_1^{-1} (le repère sera toujours orthonormé, d'unité 2 cm).
3. Soit g la fonction numérique définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

À tout entier naturel positif $n \in \mathbb{N}^*$, on associe les ensembles Δ_n et Δ'_n définis par :

$$\Delta_n = \left\{ M(x; y); \frac{1}{1+n^2} \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right\}$$

$$\Delta'_n = \left\{ M(x; y); 0 \leq x < n \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+n^2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2} \right\}$$

- a. Montrer que Δ'_n est l'image de Δ_n par une isométrie du plan, que l'on précisera.
- b. $\mathcal{A}(\Delta_n)$ désignant l'aire de Δ_n (en cm^2), démontrer que :

$$\mathcal{A}(\Delta_n) = 4 \left[\int_0^n g(t) dt - \frac{n}{1+n^2} \right]$$

4. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \int_0^n \frac{1}{1+t^2} dt.$$

- a. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- b. Montrer que pour tout réel t :

$$\frac{1}{1+t^2} \leq 1$$

et que pour tout réel t non nul :

$$\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

- c. Montrer que $a_1 \leq 1$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \int_1^n \frac{1}{1+t^2} dt \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

- d. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Partie B

1. Justifier l'existence et la dérivabilité sur \mathbb{R} de la fonction numérique G définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad G(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

2. Soit $I = \left] -\frac{\pi}{2} ; +\frac{\pi}{2} \right[$ et la fonction u définie par :

$$\forall x \in I : u(x) = \tan x \quad (\text{on note } \tan x \text{ la tangente de } x).$$

On pose, pour tout x de I :

$$H(x) = G[u(x)].$$

Démontrer que H est dérivable sur I , déterminer H' ; en déduire H .

Montrer que $G(1) = \frac{\pi}{4}$ et déterminer $\mathcal{A}(\Delta_1)$

3. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : h(x) = G\left(\frac{1}{x+1}\right) \quad \text{et} \quad k(x) = G\left(\frac{x}{x+2}\right).$$

a. Montrer que h et k sont dérivables sur \mathbb{R}_+ et déterminer $h' + k'$.

b. Montrer que $G\left(\frac{1}{2}\right) + G\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.