

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Grenoble septembre 1983 ∞

EXERCICE 1

Soit f l'application du corps \mathbb{C} des nombres complexes dans lui-même définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = z^3 + (1 - 5i)z^2 - 2(5 + i)z + 8i.$$

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet comme solution un nombre complexe imaginaire pur.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$ sachant que $f(z)$ est un produit de la forme

$$f(z) = (z - \lambda i)(z^2 + az + b) \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et } (a, b) \in \mathbb{C}^2.$$

3. On désigne par z_1, z_2, z_3 les solutions trouvées au 2., z_1 étant celle dont la partie réelle est strictement positive, z_2 celle dont la partie réelle est nulle. Montrer que z_1, z_2, z_3 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique dont on déterminera la raison.

EXERCICE 2

1. Étudier les variations de la fonction f de la variable réelle x définie dans \mathbb{R} par

$$f(x) = 1 - (2x + 1)e^{-2x}.$$

et tracer sa courbe représentative dans un repère cartésien orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . (Unité : 2 cm).

2. On désigne par $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe représentative de f , la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \lambda$ où λ est un nombre réel strictement supérieur à 1. Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$. $\mathcal{A}(\lambda)$ a-t-elle une limite lorsque λ tend vers $+\infty$?

PROBLÈME

On désigne par (P) un plan rapporté au repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) et par \vec{P} le plan vectoriel associé.

À tout couple (a, b) élément de \mathbb{R}^2 on associe l'application linéaire de \vec{P} dans \vec{P} notée $\varphi_{a,b}$ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi_{a,b} &= \left(b + \frac{a}{2}\right)\vec{i} + a\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} \\ \varphi_{a,b} &= a\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \left(b - \frac{a}{2}\right)\vec{j} \end{aligned}$$

Partie A

1. Déterminer les couples (a, b) de \mathbb{R}^2 pour lesquels $\varphi_{a,b}$ n'est pas bijective. Déterminer suivant les valeurs de a et b l'image $\varphi_{a,b}(\vec{P})$ de \vec{P} par $\varphi_{a,b}$ ainsi que le noyau de $\varphi_{a,b}$ (On appelle noyau de $\varphi_{a,b}$ l'ensemble des antécédents par $\varphi_{a,b}$ du vecteur nul de \vec{P}),

2. Lorsque $\varphi_{a,b}$ n'est pas bijective, montrer que son noyau et son image sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Partie B

1. Dans cette question, on choisit $a = b = \frac{1}{2}$. Montrer que $\varphi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ est alors une projection vectorielle dont on déterminera les éléments.
2. Déterminer tous les couples (a, b) pour lesquels $\varphi_{a,b}$ est un endomorphisme involutif.
Lorsque $\varphi_{a,b}$ est une symétrie vectorielle, préciser ses éléments caractéristiques,
3. Pour quelles valeurs de a et b , $\varphi_{a,b}$ conserve-t-elle le produit scalaire ?

Partie C

I désignant le point de (P) de coordonnées (1 ; 2), on note $f_{a,b}$ l'application affine de (P) dans (P) associée à $\varphi_{a,b}$ et laissant I invariant.

1. Quels sont les couples (a, b) pour lesquels $f_{a,b}$ est une bijection ? Que peut-on dire dans ce cas de l'image par $f_{a,b}$ d'une droite de (P) ?
2. On note f l'application $f_{a,b}$ pour laquelle $a = 0$ et $b = 2$ et (D) la droite d'équation $x + 2y - 5 = 0$. Quelle est la nature de $f_{a,b}$? En déduire, sans calculs, l'image de (D) par f .
3. Quelle est la nature de $f_{1,0}$? Préciser ses éléments caractéristiques.
4. Soit (Δ) une droite quelconque de (P) dirigée par le vecteur $\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.
 - a. a et b étant supposés quelconques, quelles sont à priori, les natures possibles de l'image de (Δ) par $f_{a,b}$ notée $f_{a,b}(\Delta)$?
 - b. Quelle condition doit vérifier \vec{u} pour que $f_{a,b}(\Delta)$ soit réduite à un point ?
 - c. $f_{a,b}$ étant supposée bijective, existe-t-il des droites (Δ) de (P) parallèles à leur image $f_{a,b}(\Delta)$?