Baccalauréat C groupe 1 juin 1983

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Dans l'espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension 3, on donne deux points fixes A et B. Déterminer l'ensemble (S) des couples $(P,\ Q)$ de $\mathscr{E}^2$ qui vérifient les deux conditions :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{0} \qquad \text{et} \qquad \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \overrightarrow{AP}\,.\overrightarrow{AQ} = 0.$$

EXERCICE 2 **3 POINTS**

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+2y+3z & = & 4, \\ 5x+6y+7z & = & 8. \end{array}\right.$$

2. Démontrer qu'il existe un et une seul triplet de $\mathbb{Z}^3$, solution du système précédent, tel que :

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1\,051.$$

PROBLÈME **3 POINTS**

Partie I

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \left|\frac{1+x}{1-x}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f qu'on notera $\mathscr{D}$. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathscr{D}$.
2. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}$, l'unité de distance étant 2 cm, dessiner la courbe représentative F de f.
3. Démontrer que, pour tout couple $(x,\ y) \in \mathscr{D}^2$ tel que $xy + 1 \neq 0$, f satisfait la propriété

$$f(x) \cdot f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right). \qquad \text{(P)}$$

Partie II

On considère maintenant le fonction numérique g de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

1. Préciser l'ensemble de définition de g qu'on notera $\mathscr{D}_1$. Déduire brièvement de I la continuité et le dérivabilité de g sur $\mathscr{D}_1$.
2. Démontrer que, pour tout couple $(x,\ y) \in \mathscr{D}_1^2$ tel que $xy + 1 \neq 0$, g satisfait la propriété (P).
3. Dessiner la courbe représentative G de g dans le même plan rapporté au repère $\mathscr{R}$ que F.

4. Dans ce plan, on appelle A l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ sont telles que :

$$0 \leqslant x \leqslant 1-\epsilon$$

(où ϵ est un réel strictement positif et inférieur à 1) et

$$g(x) \leqslant y \leqslant f(x).$$

Calculer l'aire $\mathscr{A}(\epsilon)$ de A (on raisonnera sur $f-g$).
$\mathscr{A}(\epsilon)$ admet-elle une limite lorsque ϵ tend vers 0 ?

Partie III

Dans cette partie, on appelle Δ l'intervalle ouvert $]-1\ ;\ 1[$.

1. y étant fixé dans Δ, étudier la fonction u définie sur Δ par :

$$u(x) = \frac{x+y}{1+xy}.$$

2. On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions φ définies sur Δ, qui sont continues sur Δ et dérivables en zéro et qui vérifient pour tout couple $(x\,;y)$ éléments de Δ, la relation

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right). \tag{P}$$

   a. Justifier l'écriture (P).

   b. Rechercher s'il existe des fonctions φ constantes sur Δ.
   Dans toute la suite, on suppose que φ n'est pas le fonction nulle sur Δ.

   c. Montrer que $\varphi(0) = 1$.

   d. Montrer que φ ne peut s'annuler sur Δ et que, pour tout x de Δ, on a

$$\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}.$$

3. **a.** x et y appartenant à Δ, montrer qu'il existe un réel h tel que :

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+h).$$

   b. Réciproquement, x et $x+h$ étant donnés dans Δ, montrer qu'il existe y dans Δ tel que :

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+h).$$

   (On pourra utiliser le 1. Déterminer y.

   c. On suppose h non nul, exprimer le rapport

$$\rho = \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

   au moyen de x et de y déterminé au III. 3. b..

   d. Montrer que φ est dérivable en tout point x de Δ. On rappelle que φ est supposée dérivable en zéro (on posera $\varphi'(0) = C$).
   En conclure que les fonctions φ sont telles que pour tout x de Δ :

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{C}{1-x^2}.$$

4. **a.** Démontrer qu'il existe deux réels m et n tels que, pour tout x différent de 1 et de -1 :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{m}{1-x} + \frac{n}{1+x}.$$

b. Déterminer alors toutes les fonctions φ.

c. Peut-on trouver des fonctions φ non constantes vérifiant les conditions du 2° sur les intervalles $]-1~;~1[$, $]-1~;~1]$, $[-1~;~1]$? Pouvait-on prévoir le résultat ?