Baccalauréat C La Réunion juin 1983

PROBLÈME

On se place dans tout le problème dans un plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, noté $\mathcal{R}$.
Les axes sont désignés par (Ox) et (Oy).

Partie A

Soit f l'application de $]-\infty~;~1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f~:~x \longmapsto \sqrt{\frac{1-x}{2}}.$$

1. Étudier les variations et limites de f.
   Dans toute la suite du problème la représentation graphique de f dans le repère $\mathcal{R}$ est notée $\mathcal{C}$.
   Dessiner cette courbe. Préciser la tangente au point d'abscisse 1.
2. On désigne par s la symétrie affine orthogonale·par rapport à l'axe (Ox). On pose $\mathcal{C}' = s(\mathcal{C})$.
   Établir que $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ est une parabole $\mathcal{P}$ dont on déterminera le sommet, le foyer et la directrice.
3. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet en chacun de ses points M une tangente.
   Cette tangente coupe l'axe (Ox) en un point T.
   Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (Ox).
   On désigne par S le point de coordonnées (1 ; 0) ; montrer que S est le milieu du segment [HT].
   En déduire une construction simple de la tangente à $\mathcal{C}$ en un point M quelconque donné sur $\mathcal{C}$.
4. Déterminer une primitive de f sur l'intervalle $]-\infty~;~1]$.
   En déduire l'aire de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x~;~y)$ vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lclcl}0 & \leqslant & x & \leqslant & 1\\ -f(x) & \leqslant & y & \leqslant & f(x).\end{array}\right.$$

Partie B

On se propose dans cette partie d'étudier l'existence et les propriétés de la suite réelle (u_n) définie par la donnée d'un réel u_0 et la relation :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1-u_n}{2}}.$$

1. **a.** Montrer que la suite (u_n) existe si, et seulement si, $u_0 \in [-1~;~+1]$.
   b. Déterminer u_0 de sorte que la suite (u_n) soit constante.
2. Dans la suite de l'énoncé, on posera $u_0 = \sin \alpha_0$, avec :

$$\alpha_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}~;~+\frac{\pi}{2}\right].$$

   a. Justif!er ce choix. Que devient (u_n) si $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{6}$?

b. Établir l'égalité, pour tout $\alpha_0 \in \left[-\dfrac{\pi}{2} ~;~ +\dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$\sqrt{1-\sin\alpha 2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right).$$

c. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique α_n de $\left[-\dfrac{\pi}{2} ~;~ +\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $u_n = \sin\alpha_n$.
Quelle relation y a-t-il entre α_{n+1} et α_n ?

d. On considère la suite $\left(\beta_n\right)$ de terme général vérifiant :

$$\beta_n = \alpha_n - \dfrac{\pi}{6}.$$

Montrer que cette suite est une suite géométrique.
En déduire α_n puis u_n en fonction de n et α_0.
La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Quelle est cette limite ?

Partie C

Soit M un point mobile de la courbe $\mathscr{C}$ (étudiée dans la partie A) d'abscisse $\sin t$, avec $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2} ~;~ +\dfrac{\pi}{2}\right]$.

1. Déterminer la trajectoire du point M et le sens de déplacement du point M sur cette trajectoire.
2. Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{\gamma}(t)$ du point M à la date t. Étudier les variations de la fonction $t \longmapsto \left\|\overrightarrow{v}(t)\right\|^2$; on appellera t_0 l'unique réel dans $\left[-\dfrac{\pi}{2} ~;~ +\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin t_0 = \dfrac{1}{16}$.
3. Soit $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2} ~;~ +\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Au point M, on associe les points V et Γ tels que le vecteur $\overrightarrow{\text{MV}}$ soit le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ et le vecteur $\overrightarrow{\text{M}\Gamma}$ soit le vecteur accélération $\overrightarrow{\gamma}(t)$.
   Étant donnée, sur la figure, la position de M (à la date t) on demande de construire géométriquement (règle, compas) les points V et Γ.
   Indication : Pour construire V on peut commencer de la façon suivante :
   La perpendiculaire menée de M à l'axe (Ox) coupe le cercle de centre O et de rayon 1 en un ou deux points, dont un seul d'ordonnée positive ou nulle.
   Quelle est l'ordonnée de ce point que l'on notera M′ ?
   $\left(\text{On fera le dessin pour la valeur de } t \text{ telle que } \sin t = \dfrac{1}{4}\right)$.